

РЕСПУБЛИКА УЗБЕКИСТАН
НАВОЙСКИЙ ГОРНО-МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИЙ КОМБИНАТ
НАВОЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ

Кафедра «Автоматизация и управление»

Конспект лекции по дисциплины
«Идентификация и моделирования технологических процессов» для
направления «Автоматизация и управление технологических процессов и
производств»
(часть-1)

Бойбутаев С.Б., _____ кафедры «АУ» НГГИ.
Основы моделирования и оптимизации технологических процессов.
Конспект лекции.
НГГИ 20 _____ г. _____ стр.

Рецензенты: к.т.н, доц. Товбойев А.Н.
доц. Уринов Ш.Р.

Кафедра «Автоматизация и управление»

Рекомендовано к печати учебно-методическим Советом Навоийского
государственного горного института

Содержания

| | |
|--|--|
| 1 - лекция: Введение. Понятие о моделировании. Принципы моделирования процессов и их применение в автоматизированных системах. | |
| 2 - лекция: Общая сведения о компьютерное моделирование и оптимизация, которые используются в промышленных производствах. | |
| 3 - лекция: Общие понятия об моделирования. | |
| 4 - лекция: Математическое и физическое моделирования. | |
| 5 - лекция: Классификация видов моделирования систем. | |
| 6 - лекция: Математическое модели объектов. | |
| 7 - лекция: Математическое моделирование и принципы анализа систем управления. | |
| 8 - лекция: Структура системы. | |
| 9 - лекция: Классический подход при моделировании систем. | |
| 10 - лекция: Возможности и эффективность моделирования систем на вычислительных машинах. | |
| 11 - лекция: Построение концептуальной модели системы и ее формализация. | |
| 12 - лекция: Алгоритмизация моделей систем и их машинная реализация. | |
| 13 - лекция: Модели системы с распределенными параметрами. | |
| 14 - лекция: Анализ принцип построение математическое моделирование сложных технических и технологических объектов. | |
| 15 - лекция: Типичные задачи математический моделирование объектов. | |
| 16 - лекция: Получение статическое описание по уравнения динамика. | |
| 17 - лекция: Составление линейного модели по нелинейного уравнения статики и динамики. | |
| 18 - лекция: Структурные и параметрические модели технологических потоков. | |
| 19 – лекция: Математическое описание структуры потоков в аппарате. | |
| 20 - лекция: Методы исследования структуры потоков. импульсный метод. | |
| 21 - лекция: Методы исследования структуры потоков. метод установившегося состояния. | |
| 22 - лекция: Методы исследования структуры потоков. метод синусоидального возмущения. | |
| 23 - лекция: Основные понятия корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализа. | |
| 24 - лекция: Условие применение статистического анализа. | |
| 25 - лекция: Оценка надёжности результатов анализа. | |
| 26 - лекция: Проверка адекватности моделей. | |
| 27 - лекция: Математическое планирование экспериментов в технологических процессах. | |
| 28 - лекция: Ортогональное планирование экспериментов. | |
| 29 - лекция: Рототабельное планирование экспериментов. | |
| 30 - лекция: Имитационное моделирование. | |
| 31 - лекция: Методология построения имитационных моделей и организация имитационных экспериментов. | |

| | |
|---|--|
| 32 - лекция: Методики построения имитационных моделей. агрегативный подход. | |
| 33 - лекция: Динамическое моделирование. | |
| 34 - лекция: Методы квадратичной интерполяции и полиномиальной аппроксимации. | |
| 35 - лекция: Математические методы оптимизации технологических процессов | |
| 36 - лекция: Безусловные оптимизация одно переменные функции. | |
| Рекомендуемая литература | |

ВВЕДЕНИЕ

Образование является не просто процессом получения суммы необходимых знаний, но и процессом формирования духовной сущности человека. В полной мере это относится и к высшему образованию. Именно поэтому воспитание неотделимо от процесса обучения.

Курс “Основы моделирования и оптимизации технологических процессов” является дисциплиной, в которой закладываются моделирование, численные методы, компьютерное моделирование системы управления в промышленных предприятиях их проектировании и эксплуатации в отрасли народного хозяйства.

Одной из целей преподавания математических и естественнонаучных дисциплин в техническом вузе является повышение общего уровня информационной и математической культуры будущих специалистов. При этом также решается задача воспитания высокой культуры творческого обращения с наукой.

Целью изучения дисциплины является формирование у студентов достаточного уровня знаний и навыков, позволяющих свободно ориентироваться в математическое, имитационное и Основы моделирования технологических процессов, используемых в сфере систем управления, и эффективно их использовать в своей профессиональной деятельности.

Основными задачами дисциплины являются: овладение методологией построения и применения математических, имитационных и компьютерных моделей разных систем, углубления теоретических знаний о проблемах управление, исследуемых средствами математического моделирования; изучение типовых моделей, используемых в систем управление на разных уровнях народного хозяйства.

В результате изучения дисциплины студенты должны:

Знать:

- современное состояние уровня и направлений развития Основы моделирования технологических процессов;
- прогрессивные тенденции моделирование;
- автоматизация производственных процессов, управление компьютерной техникой;
- общие принципы построение математическое модели.
- уверенно работать в качестве пользователя персонального компьютера, самостоятельно использовать внешние носители информации для обмена данными между компьютерами;
- работать с программными средствами моделирование;
- построение эмпирических моделей;
- использовать в профессиональной деятельности Основы моделирования технологических процессов.

Лекция №1

Введение. Понятие о моделировании. Принципы моделирования процессов и их применение в автоматизированных системах.

План:

1. Понятие о моделировании.
2. Принципы моделирования процессов и их применение в автоматизированных системах.

Бурное развитие науки и техники, выход практически всех отраслей знаний на новый, более всеобъемлющий уровень, все возрастающее взаимопроникновение фундаментальных и технических дисциплин потребовали объединения усилий специалистов разных направлений. Создание очень сложных и разветвленных народнохозяйственных механизмов, разработка сложных технических объектов и систем, проблемы управления, экономики и экологии обусловили необходимость использования нетрадиционных для конкретной области методов и методик. Настоятельно проявилась необходимость проведения исследований междисциплинарного характера. В этих условиях в пятидесятые годы и возникли так называемые системные методы исследований, особенно сильным толчком для развития которых и, по существу, определяющим их возможности явилось появление взрывной по характеру развития и всепроницающей вычислительной техники. Развитие любой отрасли науки и техники в современных условиях невозможно без ЭВМ и это особенно характерно для системных исследований. В литературе, посвященной кибернетике и системным исследованиям, можно найти достаточно много определений понятия "система". И практически все они, так или иначе, сводятся к определению, которое приведено в энциклопедии: "система - это множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определенную целостность и единство". В рамках этого определения под сложной системой будем понимать систему, обладающую большим количеством элементов и связей, которую можно описать каким-либо образом.

В литературе, посвященной системным исследованиям, используются в основном четыре понятия: "системный подход", "общая теория систем", "системотехника" и "системный анализ".

Наиболее неопределенным из них является термин "системный подход". Все, кто сталкивается с этим понятием, в принципе представляют, что это такое. Исследователь всегда стремился изучать явление, факт или объект в совокупности с другими явлениями, фактами или объектами. Иными словами, стремление к комплексному, системному изучению является очевидным для ученого или практика. Вместе с тем, практические рекомендации по реализации системного подхода в настоящее время трудно отыскать в литературе. Многие

авторы, под предлогом рассмотрения и описания применения системного подхода в той или иной конкретной области по существу излагают методы и методики, составляющие аппарат системных исследований, а не принципы реализации системного подхода. Отсутствие таких практических рекомендаций, по-видимому, обусловлено объективной невозможностью их создания. Таким образом, системный подход - это некий общеметодологический принцип.

К сожалению, неясным является и толкование термина "общая теория систем". Основоположники этой теории (Л. Берталанфи, А.А. Богданов и другие) пытались отыскать некое общее, объединяющее начало, характерное для достаточно сложных биологических и социальных образований. Предпринимались попытки переноса принципов общей теории систем на объекты иной, нежели биологическая или социальная, природы. Но для развития общей теории систем необходимо достаточно большая степень абстрагирования. Это и привело к тому, что общая теория систем в настоящее время является отраслью знаний, относящейся к методологии всей науки в целом.

Под системотехникой понимается научное направление, охватывающее проектирование, создание, испытание и эксплуатацию сложных систем. Из этого определения следует, что системотехника - это конкретная дисциплина, объединяющая различные методы, разработанные в разных отраслях знаний, связанные единой целью - синтезом сложных технических систем. Аппарат системотехники составляют методы исследования операций, теории автоматического управления и других дисциплин. Таким образом, системотехника связана с практической реализацией системных методов при создании конкретных технических систем.

Прежде чем перейти к синтезу сложных систем необходимо, очевидно, провести тщательное исследование существующих систем, областей их применения, тенденций развития, то есть проделать все действия, которые принято называть анализом. Но системный анализ дает не только методологию проведения анализа сложной системы. Помимо этой методологии, системный анализ представляет собой еще и методологию формирования и обоснования решений по комплексным проблемам сложных систем. В силу того, что анализу подвергается сложная система, системный анализ, очевидно, должен включать в качестве отдельных своих составных частей дисциплины, носящие несамостоятельный характер, и при этом всегда нужно помнить о междисциплинарных связях. В противном случае попытка более или менее полного описания аппарата системного анализа бесплодна. Таким образом, под системным анализом мы будем понимать совокупность методов исследования сложных систем.

Обобщая вышесказанное, можно заключить, что системные исследования основываются на общей теории систем и системном подходе, как общенаучных методологических принципах, и проходят последовательно этапы системного анализа и системотехники. При этом отметим итеративность цепочки

"системный анализ - системотехника".

Процесс анализа можно разбить на три стадии:

- формулировка целей исследования, определение исходных предпосылок и границ исследования, предварительный выбор инструментов анализа;
- накопление информации, анализ системы и разработка вариантов решений;
- оценка решений и выбор наиболее эффективного решения.

Реализация системного анализа существенно затруднена противоречивостью, неясностью и многозначностью целей, несовершенством показателей и критериев оценки эффективности. Поэтому редко удается достичь хороших результатов системного анализа с первой попытки. Здесь важна итеративность в прохождении всех стадий системного анализа. При этом, итерации повторяются до тех пор, пока не будет получен удовлетворительный результат, либо до тех пор, пока не иссякнут ресурсы (материальные, временные или какие-либо иные).

В принципе, системный анализ не включает в себя ничего действительно нового, за исключением именно системного рассмотрения объекта анализа, применения количественных методов и, главное, исследования последствий принимаемых решений. К сожалению, все это не гарантирует высокого качества рекомендаций, вырабатываемых при системном анализе. Но неудовлетворительные результаты связаны не с качеством методов системного анализа, а чаще всего - с неверными формулировками целей и плохими критериями. Вместе с тем есть ряд принципов, способствующих повышению качества анализа.

1. Наибольшие усилия в системном анализе должны быть направлены на правильную постановку задачи. Для этого необходимо осмыслить проблему, очертить ее границы, определить цели и найти приемлемые критерии оценки результатов.

2. Все проводимые исследования должны иметь четко выраженную системную направленность. Необходимо исследовать систему как единое целое, устанавливать и изучать связи между элементами системы, исследуя отдельные элементы, уделять особое внимание взаимосвязям между элементами и окружающей средой. При этом существенно возрастает роль специалистов, имеющих знания и квалификацию в различных отраслях.

3. Необходимо всегда помнить, что решение наиболее важных проблем объективно сопряжено с наличием самых разнообразных неопределенностей. Об этих неопределенностях не следует забывать и их необходимо всегда

принимать в расчет. Важна оценка влияния неопределенности на конечный результат, которую можно реализовать, анализируя чувствительность исследуемой системы, то есть, анализируя как изменяются решения в зависимости от изменений исходных данных.

4. В системном анализе синтез новых решений и улучшение имеющихся всегда более ценны, нежели всеобъемлющее сравнение известных альтернатив.

5. В процессе анализа всегда необходимо придерживаться определенных научных стандартов: проверка получаемых решений посредством экспериментов или вообще возможность проверки и воспроизведения результатов другими исследователями, ясность и объективность результатов.

Системный анализ является точной наукой, поэтому для него характерны методы точных наук. Исключительно важную роль в системном анализе играют самые разнообразные математические методы. Это математический аппарат теории автоматического управления, теории графов, теории вероятностей и математической статистики и многих других научных дисциплин.

Наряду с этим, в системном анализе широко используется эксперимент. Опыт встречается в различных формах и как наблюдение, и как моделирование. Результаты экспериментов подвергаются статистическому и логическому анализу. Логический анализ предназначен для вскрытия логических закономерностей в исследуемых системах. Статистический анализ предназначен для отыскания формализованных закономерностей в системах.

Крайне велика в системном анализе роль моделирования. Принципиально моделирование состоит в замене исследуемой системы некоторой подобной системой, называемой моделью, и в наблюдении и экспериментировании с этой моделью. При этом, подобие модели исследуемой системе состоит в подобии интересующих пользователя свойств, а не в полном повторении всей системы.

При проведении системного анализа моделирование является мощным связующим фактором между теорией и опытом, служит инструментом проверки создаваемых теорий и открывает новые возможности синтеза научных знаний и их интеграции.

Лекция №2

ОБЩАЯ СВЕДЕНИЯ О КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ, КОТОРЫЕ ИСПОЛЬЗУЮТСЯ В ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРОИЗВОДСТВАХ

План:

1. Основные понятия компьютерного моделирования химических производств.
2. Системный анализ химико - технологических процессов.

Современные достижения в области компьютерного моделирования химических процессов дают возможность более строго и с большей точностью решать задачи проектирования и управления химическими производствами. При этом широко используется методология системного анализа, с применением которой успешно решаются задачи анализа, оптимизации и синтеза новых и реконструируемых технологий. Рассчитываемые в этом случае оптимальные (наилучшие) режимные и конструкционные параметры процессов составляют основу технологических регламентов производств, позволяют наиболее эффективно управлять ими и в наибольшей степени удовлетворяют требованиям энергоресурсо сбережения.

Развитие и широкое распространение информационных технологий (ИТ-технологий), внедрение локальных (ЛВС) и глобальных (ГВС) вычислительных сетей, интернет-технологий дают возможность развивать и совершенствовать современные системы прикладной информатики — автоматизированные (компьютерные) системы (АС).

К ним относятся:

- автоматизированные информационные системы (АИС);
- системы автоматизированного проектирования (САПР);
- автоматизированные системы научных исследований (АСНИ);
- автоматизированные системы управления (АСУ);
- автоматизированные обучающие системы (АОС).

При применении указанных АС для решения задач химической технологии предполагается использование компьютерных моделей реальных процессов и производств, в частности, результатов компьютерного моделирования химико-технологических процессов. При этом автоматизированные системы, в соответствии с требованиями к новым информационным технологиям, должны включать в себя методологии решения задач с применением прикладных систем искусственного интеллекта (ИИ) и экспертных систем (ЭС), с использованием которых удаётся моделировать некоторые интеллектуальные функции специалистов в конкретной предметной (предметной) области, а соответственно, и увеличить надёжность принимаемых решений неформализованных задач (НФЗ).

В отличие от формализованных задач (ФЗ), для решения которых требуется реализация вычислительных алгоритмов на компьютерах,

рациональные решения для НФЗ получаются в результате творческой деятельности специалистов, которая требует, прежде всего, переработки большого количества смысловой (семантической) информации и непосредственно не связана с проведением каких-либо вычислений. Для поиска семантических решений НФЗ необходимо применять не вычислительные алгоритмы, как в случае с ФЗ, а эвристическо-эволюционные процедуры.

Экспертные системы (ЭС) — это интеллектуальные системы, которые способны в диалоге с квалифицированным пользователем — лицом, принимающим решение, на основе накопления и переработки специальных знаний и правил принятия решений проводить экспертизу, консультировать и давать рекомендации по выбору действий (операций), распознавать ситуации ставить диагноз и обосновывать заключения при поиске решений НФЗ некоторой проблемной (предметной) области. ЭС можно рассматривать как своеобразные программно-технические усилители интеллектуальной творческой деятельности лица, принимающего решение. Такие интеллектуально-диалоговые системы представляют собой сложные человеко-машинные системы, так называемые системы эвристического типа, применение которых обеспечивает получение наиболее надёжных результатов решения задач химической технологии.

В настоящей главе представлены основные понятия, связанные с компьютерным и математическим моделированием реальных процессов.

Компьютерное моделирование химико-технологических процессов предполагает решение следующих основных задач:

- построения математической модели процесса и её реализацию на компьютере;
- идентификации (отождествления) разработанной математической модели с моделируемым процессом с целью обеспечения её адекватности, т.е. качественного и количественного соответствия модели реальному процессу;
- оптимизации процесса с использованием его математической модели, т.е. определения оптимальных (наилучших) режимных и конструкционных параметров процессов, которые обеспечивают наибольшее или наименьшее значение выбранного критерия оптимальности (целевой функции), характеризующего эффективность реального процесса.

1.1. Системный анализ химико - технологических процессов

Для решения задач компьютерного моделирования применяется системный подход, в соответствии с которым химико-технологический процесс (ХТП) рассматривается как некоторая функциональная система («объект» на рис. 1.1), характеризующаяся следующими основными совокупностями переменных:

\bar{X} — вектором входных переменных, которые влияют на состояние процесса и, в общем случае, определяют его состояние;

\bar{y} — вектором выходных переменных, которые характеризуют состояние процесса и зависят от входных переменных \bar{X} .

Системный подход даёт возможность осуществить математическую формализацию задачи при построении математических моделей как процессов в отдельных аппаратах (типовой ХТП), так и в их совокупности (химических производств), обеспечивая возможности познания физико-химических механизмов протекающих процессов и получение широких обобщений и количественных закономерностей.

Любая система состоит из взаимосвязанных и взаимодействующих между собой и с внешней средой частей и, в определённом смысле, представляет собой замкнутое целое.

Объект, представляющий собой один аппарат или секцию аппарата (типовой ХТП), в котором протекают физико-химические процессы, называется физико-химической системой (ФХС).

Объект, являющийся совокупностью соединённых между собой аппаратов (химическое производство), в частности, для производства некоторого целевого продукта, называется химико-технологической системой (ХТС).

Принципиальная технологическая схема процесса получения произвольного целевого продукта P^* , представляющая собой ХТС и включающая различные ФХС, приведена на рис. 1.2.



Рис. 1.1. Схематическое представление ХТП как функциональной системы

Для отображения зависимости выходных переменных \bar{y} от входных переменных \bar{X} используется физико-химический оператор (для ФХС) или химико-технологический оператор (для ХТС) Ω :

$$\bar{y} = \Omega(\bar{X}). \quad (1.1)$$

В (1.1) оператор Ω отображает пространство входных переменных \bar{X} в пространство значений выходных переменных \bar{y} .

Отображение (1.1) отражает все реально протекающие процессы и представляет собой отображение объективной реальности, для которой требуется построить приближённую математическую модель процесса. При этом к входным переменным \bar{X} относят не только собственно входные

переменные, как, например, свойства перерабатываемого сырья — его расход, состав, температуру, а также возмущающие переменные (значения которых изменяются случайным образом во времени и по тем или иным причинам не могут быть измерены) и компенсирующие их управляющие переменные (которые могут быть измерены и имеется возможность на них воздействовать в соответствии с теми или иными требованиями). Для нестационарных режимов объектов одним из компонентов вектора \bar{X} может быть время, от которого могут зависеть и другие компоненты вектора входных переменных \bar{X} .

Важнейшим этапом построения адекватной математической модели химических процессов является анализ структуры химико-технологического или физико-химического операторов Ω (1.1). При этом осуществляется декомпозиция сложной системы на более простые подсистемы в соответствии со следующими принципами:

- определения иерархической структуры системы, т.е. выделения её иерархических ступеней и взаимосвязей между ними на основе фундаментальных знаний, экспериментальных данных и опыта специалистов;
- реализации принципа иерархической соподчинённости при формализации знаний об изучаемых элементах системы и принятии разумных допущений, что выражается в учёте наиболее важных (приоритетных) процессов, протекающих на низких ступенях иерархии системы и оказывающих влияние на процессы на верхних уровнях иерархии (при этом для выявления учитываемых процессов низких уровней иерархии необходимо их тщательное изучение с целью выявления наиболее приоритетных из них);

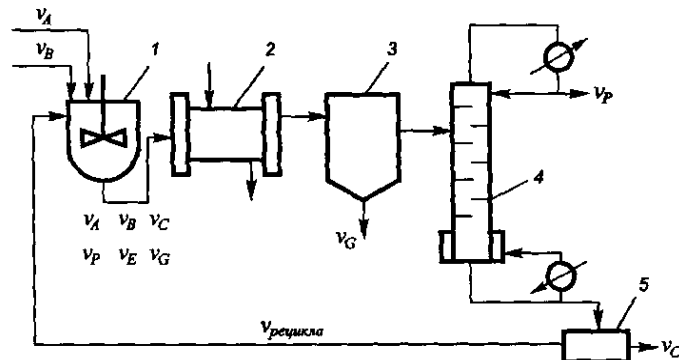


Рис.1.2. Принципиальная технологическая схема получения целевого продукта P^* : 1-реактор с мешалкой; 2- теплообменник; 3-отстойник; 4-ректификационная колонна; 5-делитель потока

- комплексного исследования отдельных процессов с учётом влияния переменных не только на рассматриваемом уровне иерархии системы, но и на низших уровнях, и на более высоких ступенях иерархии системы.

В химической промышленности целесообразно выделить 5 ступеней иерархии системы.

1. Микроуровень — процессы и явления рассматриваются без учёта влияния закономерностей движения потоков фаз в аппаратах.

2. Макроуровень - ФХС - представляет собой секцию аппарата (например, слой насадки или тарелку) или отдельный аппарат. Все процессы рассматриваются с учётом движения материальных и тепловых потоков.

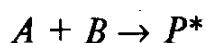
3. Уровень химического производства — ХТС — представляет собой совокупность аппаратов, связанных между собой материальными, тепловыми и информационными потоками.

4. Уровень предприятия — это несколько производств, составляющих предприятие, при анализе работы которого необходимо учитывать экономические и управленческие закономерности протекания бизнес-процессов функционирования предприятия.

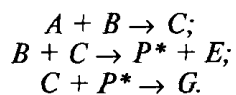
5. Уровень компании или объединения — это несколько предприятий, объединённых в компанию (Газпром, Лукойл, Сибур и др.).

Следует отметить, что на каждом из перечисленных уровней иерархии совместно решаются задачи оптимизации технологических процессов и автоматизации управления производством.

Рассмотрим первые три уровня иерархии химического предприятия на примере получения продукта P^* (см. рис. 1.2) по следующей кинетической схеме реакции:



При этом основные стадии химической реакции получения целевого продукта P^* с учётом образующихся побочных продуктов можно условно описать уравнениями:



Целевой продукт P^* образует с компонентом E азеотроп с максимальной температурой кипения, в результате чего часть его попадает в куб ректификационной колонны. Чтобы снизить потери целевого продукта P^* при технологическом оформлении процесса его получения необходимо организовать рециклический (обратный) поток в реактор.

Принципиальная технологическая схема получения продукта P^* в промышленных условиях представлена на рис. 1.2. При этом химическое производство рассматривается как химико-технологическая система (ХТС), а процессы в отдельных аппаратах — как физико-химические системы (ФХС).

Химико-технологическая система (ХТС) — это технологическая схема процесса, которая рассматривается как совокупность тесно связанных подсистем (процессов в отдельных аппаратах, или химико-технологических процессов — ХТП), имеющих единую цель функционирования и подчиняющихся основным принципам системного анализа, в частности комплексности, иерархичности и иерархической соподчиненности.

Физико-химическая система (ФХС) — это сплошная многофазная многокомпонентная среда в отдельном аппарате или секции аппарата, распределённая в пространстве и переменная во времени, в каждой точке гомогенности которой и на границе раздела фаз происходит перенос вещества, энергии и импульса при наличии их источников (стоков).

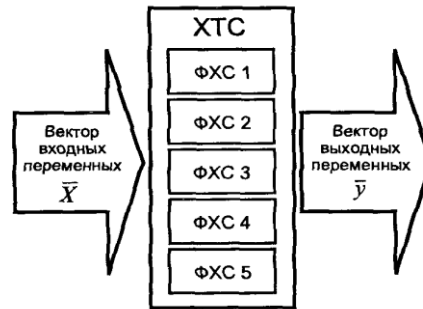


Рис. 1.3. Схематическое представление модели ХТС, технологическая схема которой представлена на рис. 1.2, в виде совокупности ФХС

На рис. 1.2 подсистемами ХТС являются ФХС — реактор, теплообменник, отстойник, ректификационная колонна, делитель потока. Каждая из подсистем имеет цель функционирования — проведение химического взаимодействия, нагревание (охлаждение) потоков, выделение компонентов из потока и т.п. Подсистемы ХТС (отдельные аппараты) связаны между собой технологическими потоками (трубопроводами), что обеспечивает получение целевого продукта P^* — т.е. достижение единой цели функционирования всей ХТС.

Схематически изображение ХТС (см. рис. 1.2) в виде совокупностей ФХС представлено на рис. 1.3. На вход ХТС поступают потоки, характеризующиеся вектором входных переменных \bar{x} (например, составы потоков на входе в аппараты, температуры и давления в аппаратах и т.д.). В пределах ФХС входные переменные \bar{x} претерпевают целенаправленное физико-химическое превращение в вектор выходных переменных \bar{y} .

Лекция №3

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ОБ МОДЕЛИРОВАНИИ.

План:

1. Общие понятия об моделировании.
2. Этапы разработки математической модели.
3. Технологическая схема процесса получения продукта

Процессы химической технологии - это сложные физико-химические системы, имеющие двойственную детерминированно-стохастическую природу, переменные в пространстве и во времени. Участвующие в них потоки вещества, как правило, многофазные и многокомпонентные. В ходе протекания процесса в каждой точке фазы и на границах раздела происходит перенос импульса, энергии, массы. Весь процесс в целом протекает в аппарате с конкретными геометрическими характеристиками, оказывающими, в свою очередь, влияние на характер этого процесса.

Существенная особенность химико-технологических процессов состоит в том, что совокупность составляющих их явлений носит детерминированно-стохастическую природу, проявляющуюся в наложении стохастических особенностей гидродинамической обстановки в аппарате на процессы массо-, теплопереноса и химического превращения. Это объясняется случайным взаимодействием составляющих компонентов фаз (соударением частиц, их дроблением, коалесценцией, случайным блужданием по объему аппарата) или случайным характером геометрии граничных условий в аппарате (случайное расположение элементов беспорядочно уложенной насадки, зерен катализатора, производственная ориентация межфазной границы движущихся сред и т.п.).

Подобного рода системы характеризуются чрезвычайно сложным взаимодействием составляющих их фаз и компонентов, вследствие чего изучение их с позиций классических детерминированных законов переноса и сохранения становится невозможным.

Как же изучать химико-технологические процессы? Ключ к решению этой проблемы дает метод математического моделирования, базирующийся на стратегии системного анализа, сущность которой заключается в представлении процесса как сложной взаимодействующей иерархической системы с последующим качественным анализом ее структуры, разработкой математического описания и оценкой неизвестных параметров. Так, например, при рассмотрении явлений, возникающих в процессе движения ансамбля частиц, капель или пузырьков газа в сплошной жидкой среде, выделяют пять уровней иерархии эффектов: 1) совокупность явлений на атомарно-молекулярном уровне; 2) эффекты в масштабе надмолекулярных или глобулярных структур; 3) множество физико-химических явлений, связанных с движением единичного включения дисперсной фазы, с учетом химических реакций и явлений межфазного энерго- и массопереноса; 4) физико-химические процессы в ансамбле включений, перемещающихся в сплошной фазе; 5)

совокупность процессов, определяющих макрогидро-динамическую обстановку в масштабе аппарата. Такой подход позволяет наиболее полно установить совокупность явлений всего процесса и связей между ними.

Под математическим моделированием понимают изучение свойств объекта на математической модели. Его целью является определение оптимальных условий протекания процесса, управление им на основе математической модели и перенос результатов на объект.

Основным понятием метода математического моделирования является понятие математической модели. *Математической моделью* называется приближенное описание какого-либо явления или процесса внешнего мира, выраженное с помощью математической символики.

Математическое моделирование включает три взаимосвязанных этапа:

- 1) составление математического описания изучаемого объекта;
- 2) выбор метода решения системы уравнений математического описания и реализация его в форме моделирующей программы;
- 3) установление соответствия (адекватности) модели объекту.

На этапе составления математического описания предварительно выделяют основные явления и элементы в объекте и затем устанавливают связи между ними. Далее, для каждого выделенного элемента и явления записывают уравнение (или систему уравнений), отражающее его функционирование. Кроме того, в математическое описание включают уравнения связи между различными выделенными явлениями. В зависимости от процесса математическое описание может быть представлено в виде системы алгебраических, дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

Этап выбора метода решения и разработки моделирующей программы подразумевает выбор наиболее эффективного метода решения из имеющихся (под эффективностью имеются в виду быстрота получения и точность решения) и реализацию его сначала в форме алгоритма решения, а затем — в форме программы, пригодной для расчета на ЭВМ.

Построенная на основе физических представлений модель должна верно качественно и количественно описывать свойства моделируемого процесса, т.е. она должна быть адекватна моделируемому процессу. Для проверки адекватности математической модели реальному процессу нужно сравнить результаты измерений на объекте в ходе процесса с результатами предсказания модели в идентичных условиях.

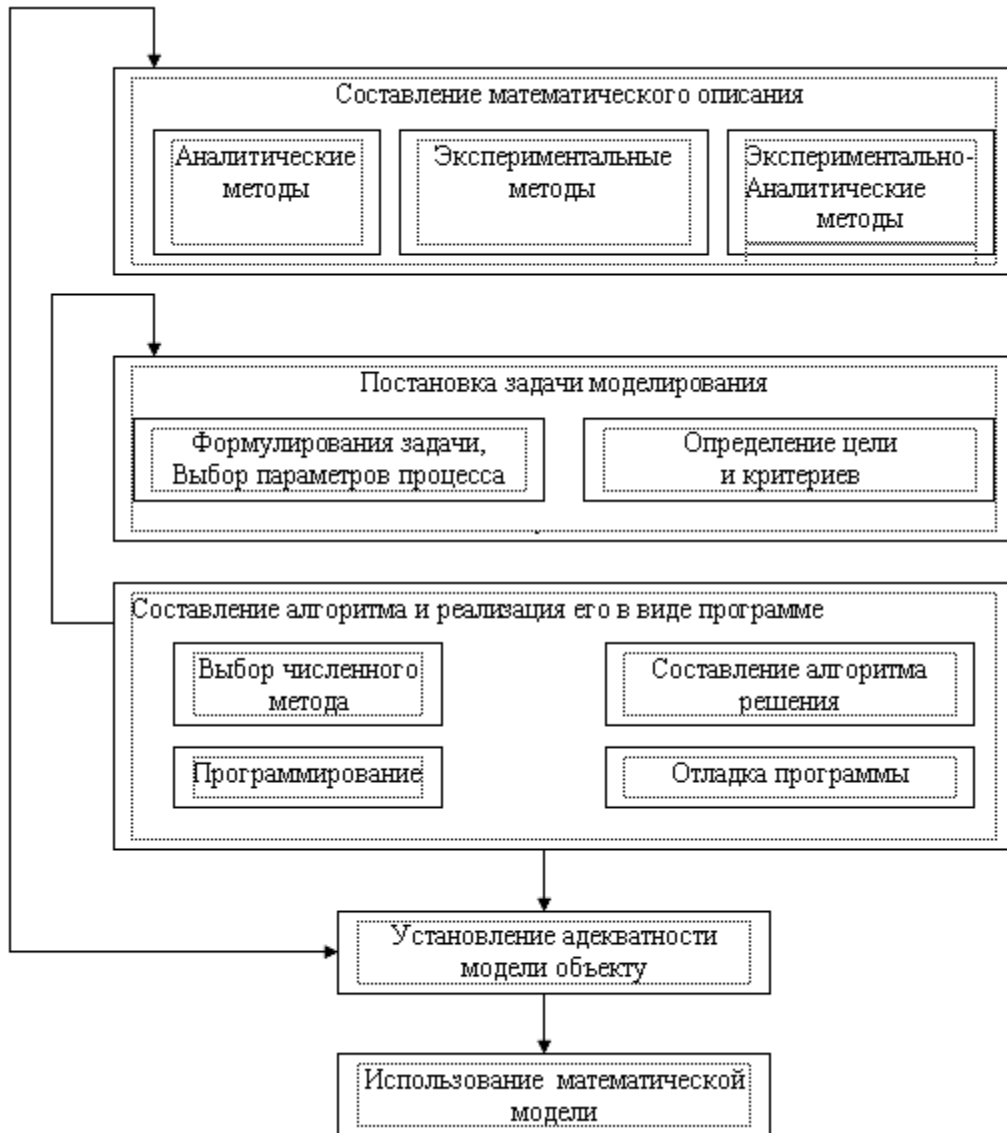


Рис. 1.1 Этапы разработки математической модели

Этап установления адекватности модели является заключительным в последовательности этапов, выполняемых при ее разработке. На рис. 1.1 изображена общая схема разработки математической модели.

При построении математической модели реальное явление упрощается, схематизируется, и полученная схема описывается в зависимости от сложности явлений с помощью того или иного математического аппарата.

От правильности учета в модели характерных черт рассматриваемого процесса зависят успех исследования и ценность полученных результатов моделирования.

В модели должны быть учтены все наиболее существенные факторы, влияющие на процесс, и вместе с тем она не должна быть загромождена множеством мелких, второстепенных факторов, учет которых только усложнит

математический анализ и делает исследование либо чрезмерно громоздким, либо вообще нереализуемым.

Метод математического моделирования применяют при изучении свойств процессов, для которых имеется достаточно точное математическое описание. В зависимости от степени полноты математического описания можно выделить два предельных случая:

а) известны полная система уравнений, описывающая все основные стороны моделируемого процесса, и все числовые значения параметров этих уравнений;

б) полное математическое описание процесса отсутствует.

Этот второй случай типичен для решения задач, в которых приходится иметь дело с управлением процессами при наличии неполной информации об объекте и действующих на него возмущениях. При отсутствии достаточной информации об исследуемых явлениях их изучение начинается с построения простейших моделей, но без нарушения основной (качественной) специфики исследуемого процесса.

Таким образом, по результатам опытов с моделью мы должны количественно предсказать поведение оригинала в рабочих условиях.

Под объектами моделирования в производстве следует понимать:

1. Технологические системы (ТС) – участки из технологического оборудования, автоматические линии, гибкие производственные системы (ГПС)

2. Технологические процессы (ТП).

3. Физические и химические процессы (ФХП), протекающие при функционировании технологического оборудования.

К процессу моделирования предъявляют два основных требования.

Во-первых, эксперимент на модели должен быть проще, быстрее, экономичнее, безопаснее, чем эксперимент на оригинале.

Во-вторых, нам должно быть известно правило, по которым проводится расчет параметров оригинала на основе испытания модели. Без этого даже самое лучшее моделирование окажется бесполезным.

В чистом виде (по-отдельности) математические модели данных объектов применяются довольно редко, как правило, они комбинированные. Например, в математических моделях ТС используются математические модели ТП, в которых, в свою очередь, применяются математические модели ФП, ХП и ФХП.

В современной науке термин модель применяют в нескольких значениях.

Модель – это некоторый объект, который на разных этапах исследования может заменять исследуемый объект.

Модель – это целевой образ объекта оригинала, отражающий наиболее важные свойства для достижения поставленной цели.

Модель – это мысленно представляемая, либо материально реализованная система, которая может отображать или воспроизводить объект исследования, а

также замещать его с целью изучения и представления новой информации об объекте.

Таким образом, создание каждой модели всегда имеет какую-либо цель.

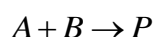
Математические модели разрабатываются для:

1. Описания ФП, ФХП, ТП, ТС.
2. Исследования ФП, ФХП, ТП, ТС.
3. Проектирования ТП, ТС.
4. Оптимизации в ходе проектирования ТП, ТС
5. Построения систем автоматизированного проектирования.

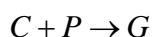
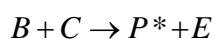
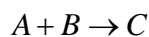
Вид, состав и сложность математической модели зависит от того, какой объект она описывает и для каких целей разработана.

Пример.

Реакция получения продукта Р:



Основные стадии:



Технологическая схема процесса получения продукта Р (ХТС)

Рис.1.2

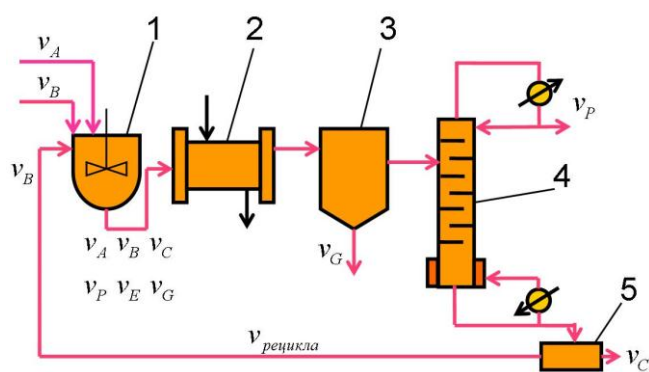


Рис.1.2

Для создания математической модели необходимо провести системный анализ ТП



ХТС – технологическая схема процесса, которая рассматривается как совокупность тесно связанных подсистем (процессов в отдельных аппаратах), имеющих единую цель функционирования и подчиняющихся принципам системного анализа, в частности комплексности и иерархической соподчиненности. В общем случае химико-технологический процесс (ХТП) формализуется как физико-химическая система - ФХС

ФХС – сплошная многофазная многокомпонентная среда, распределённая в пространстве и переменная во времени, в каждой точке гомогенности которой и на границе раздела фаз происходит перенос вещества, энергии и импульса при наличии их источников (стоков).

Лекция №4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ.

План:

1. Физическое описание природы объекта.
2. Составление математического описания объекта.

Обычно при математическом моделировании объектов химической технологии принимаются во внимание следующие "элементарные" процессы: 1) движение потоков фаз; 2) массообмен между фазами; 3) теплопередача; 4) изменение агрегатного состояния (испарение, конденсация, растворение и т.д.); 5) химические превращения.

Полнота математического описания "элементарных" процессов в модели зависит от их роли во всем химико-технологическом процессе, степени изученности, глубины взаимосвязи "элементарных" процессов в объекте и желаемой точности всего описания. Взаимосвязь "элементарных" процессов может быть чрезвычайно сложной. Поэтому на практике часто делают различные допущения относительно характера связей, что позволяет избежать необходимости введения в модель недостаточно изученных зависимостей и, следовательно, излишнего усложнения описания.

Например, при физическом описании процесса ректификации смесей выделяют следующие "элементарные" процессы: 1) гидродинамика потоков жидкости и пара в колонне; 2) массообмен между жидкостью и паром; 3) теплопередача между жидкостью и паром; 4) испарение жидкости и конденсация пара. Все указанные "элементарные" процессы протекают либо на тарелке, либо в насадочной секции колонн и прямо связаны между собой. Полное описание этих процессов представляет собой чрезвычайно сложную систему уравнений. Только описание гидродинамики потока жидкости на тарелке (либо в насадке) с помощью уравнения Навье-Стокса представляет собой задачу чрезмерной вычислительной сложности. Не менее сложно и решение задачи полного описания массообмена между потоками жидкости и пара. Вместе с тем эти задачи должны решаться совместно как единая система уравнений. Отсюда следует, что без разумных упрощающих допущений здесь не обойтись. Поэтому обычно принимают идеализированное представление относительно движения потоков пара и жидкости (пар движется в режиме полного вытеснения, а жидкость полностью перемешивается на тарелке), а массопередачу выражают через эффективность ступеней разделений, определяемую в большинстве случаев полуэмпирическими методами, либо вообще не рассматривают ее, считая, что на каждой ступени разделения достигается равновесие.

Следует отметить, что иногда физическое описание объекта моделирования устанавливается в результате математического моделирования. Так, математическое моделирование используется для проверки некоторых гипотез о механизме процессов, протекающих в объекте. Для этого в состав

модели вводят исследуемые соотношения, чтобы по результатам последующего моделирования судить о справедливости того или иного физического предположения. Например, механизмы каталитических химических превращений в большинстве случаев неизвестны исследователям. Закладывая в математическую модель тот или иной механизм протекания химической реакции и сравнивая результаты моделирования с экспериментальными, можно отыскать наиболее близкий к истинному механизм.

Составление математического описания объекта

При составлении математического описания общим приемом является блочный принцип. Согласно этому принципу, составлению математического описания предшествует анализ отдельных "элементарных" процессов, протекающих в объекте моделирования. При этом эксперименты по изучению каждого такого процесса проводят в условиях, максимально приближающихся к условиям эксплуатации объекта моделирования.

Сначала исследуют гидродинамическую модель процесса как основу структуры математического описания. Далее изучают кинетику химических реакций, процессов массо- и теплопередачи с учетом гидродинамических условий найденной модели и составляют математическое описание каждого из этих процессов. Заключительным этапом в данном случае является объединение описаний всех исследованных "элементарных" процессов (блоков) в единую систему уравнений математического описания объекта моделирования. Достоинством блочного принципа построения математического описания является то, что его можно использовать на стадии проектирования объекта, когда окончательный- вариант аппаратурного оформления еще неизвестен.

Методы составления математического описания. К указанным методам относятся аналитический, экспериментальный и экспериментально-аналитический.

Аналитическими методами составления математического описания обычно называют способы вывода уравнений статики и динамики на основе теоретического анализа физических и химических процессов, происходящих в исследуемом объекте, а также на основе заданных конструктивных параметров аппаратуры и характеристик перерабатываемых веществ. При выводе этих уравнений используются фундаментальные законы сохранения вещества и энергии, а также кинетические закономерности процессов переноса массы и теплоты, химических превращений.

Для составления математического описания с помощью аналитических методов не требуется проведения каких-либо экспериментов на объекте, поэтому такие методы пригодны для нахождения статических и динамических характеристик вновь проектируемых объектов, физико-химические процессы в которых достаточно хорошо изучены.

Параметры (коэффициенты) составленных уравнений функционально зависят от определяющих размеров химико-технологического аппарата

(диаметра, длины и т.д.), свойств обрабатываемых веществ и величин, характеризующих протекание физико-химических процессов (констант скорости реакций, коэффициентов диффузии и др.). Некоторые параметры уравнений могут быть определены расчетным путем, другие находятся с помощью принципа подобия по результатам ранее выполненных исследований.

К недостаткам аналитических методов составления математического описания можно отнести сложность решения получающейся системы уравнений при достаточно полном описании объекта.

Экспериментальный метод составления математического описания используется для управления и исследования объектов в узком, "рабочем" диапазоне изменения входных и выходных переменных (например, при построении системы автоматической стабилизации отдельных технологических параметров). Эти методы чаще всего основываются на предположении о линейности и сосредоточенности параметров объекта. Принятие этих допущений позволяет сравнительно просто описывать наблюдаемые процессы алгебраическими или линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. При экспериментальном подходе к составлению математического описания всегда требуется постановка опытов непосредственно на изучаемом объекте.

Достоинством экспериментальных методов является простота получаемого математического описания при достаточно точном описании свойств объекта в узком диапазоне изменения параметров. Основной недостаток экспериментальных методов - невозможность установления функциональной связи между входящими в уравнения числовыми параметрами и конструктивными характеристиками объекта, режимными параметрами процесса, физико-химическими свойствами веществ. Кроме того, полученные экспериментальным методом математические описания нельзя распространять на другие однотипные объекты.

Наличие "сильных" и "слабых" сторон аналитического и экспериментального методов составления математического описания привело к необходимости разработки *комбинированного экспериментально-аналитического метода*. Сущность его заключается в аналитическом составлении уравнений описания, проведении экспериментальных исследований и нахождении по их результатам параметров уравнений. При подобном подходе к получению математического описания сохраняются многие положительные свойства экспериментальных и аналитических методов.

Состав математического описания. Формально математическое описание представляет собой совокупность зависимостей, связывающих различные переменные процесса в единую систему уравнений. Среди этих соотношений могут быть уравнения, отражающие общие физические законы (например, законы сохранения массы и энергии), уравнения, описывающие "элементарные" процессы (например, химические превращения), ограничения на переменные процесса и т.д. Кроме того, в состав математического описания входят также различные

эмпирические и полуэмпирические зависимости между разными параметрами процесса, теоретическая форма которых неизвестна или слишком сложна.

В частности, при отсутствии или весьма ограниченном объеме теоретических сведений о моделируемом объекте, когда неизвестен даже ориентировочный вид соотношений, описывающих его свойства, уравнения математического описания могут представлять собой систему связывающих выходные и входные переменные эмпирических зависимостей, полученных в результате статистического обследования действующего объекта (экспериментальный метод составления математического описания). Эти модели обычно имеют вид регрессионных соотношений между входными и выходными переменными объекта и, разумеется, не отражают физическую сущность объекта моделирования, что затрудняет обобщение результатов, получаемых при их применении.

В отличие от моделей, основанных на регрессионных соотношениях, математические модели, построенные на основе аналитического метода составления описания, отражают основные закономерности процесса и качественно более правильно характеризуют его даже при наличии недостаточно точных параметров модели. Поэтому с их помощью можно изучать общие свойства объектов моделирования, относящихся к определенному классу.

В составе математического описания, разработанного на основе физической природы моделируемого объекта, можно выделить следующие группы уравнений:

1. *Уравнения сохранения массы и энергии, записанные с учетом гидродинамической структуры движения потоков.* Данная группа уравнений характеризует распределение в потоках температуры, концентраций и связанных с ним свойств. Обобщенное уравнение материального баланса имеет вид

$$\text{Приход вещества} - \text{Расход вещества} = \text{Накопление вещества.} \quad (1.5)$$

Разность между приходом и расходом вещества равна изменению его количества в рассматриваемом объекте. В стационарном режиме не может происходить ни убыль, ни накопление. В этом случае уравнение (1.5) переходит в уравнение материального баланса вида

$$\text{Приход вещества} = \text{Расход вещества.} \quad (1.6)$$

Уравнения (1.5), (1.6) применяются как к каждому веществу в отдельности, так и ко всей совокупности веществ, участвующих в процессе. Обобщенное уравнение теплового баланса имеет вид

$$\text{Приход теплоты} - \text{Расход теплоты} = \text{Накопление теплоты.} \quad (1.7)$$

или для стационарных условий

$$\text{Приход теплоты} = \text{Расход теплоты.} \quad (1.8)$$

2. Уравнения элементарных процессов для локальных элементов потоков.

К этой группе относятся описания процессов массо- и теплообмена, химических реакций и др.

3. Теоретические, полуэмпирические или эмпирические соотношения между различными параметрами процесса. Таковы, например, зависимость коэффициента массопередачи от скоростей потоков фаз, зависимость теплоемкости смеси от состава и т.д.

4. Ограничения на параметры процесса. Например, при моделировании процесса ректификации многокомпонентных смесей на любой ступени разделения должно выполняться условие, что сумма концентраций всех компонентов равна 1. Кроме того, концентрация любого компонента должна находиться в диапазоне от 0 до 1.

5. Общим для всех математических моделей является то, что число уравнений, включаемых в математическое описание, должно быть равно числу переменных, находимых в результате моделирования.

6. Рассмотрим кратко основные классы уравнений, встречающиеся в математических описаниях химико-технологических объектов. Для характеристики свойств разных объектов моделирования обычно применяют: алгебраические и трансцендентные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных и интегральные уравнения. Последний тип - интегральные уравнения сравнительно редко встречается в задачах математического моделирования объектов химической технологии.

К алгебраическим уравнениям обычно сводится математическое описание стационарных режимов работы объектов с сосредоточенными параметрами (например, реактор полного смешения). Кроме того, уравнения этого типа применяют при описании более сложных объектов для выражения стационарных связей между разными параметрами. Математические описания в виде алгебраических уравнений наиболее просты, хотя сложность существенно зависит от числа уравнений и от вида входящих в них функций.

Обыкновенные дифференциальные уравнения обычно используют для математического описания нестационарных режимов объектов с сосредоточенными параметрами (например, для описания динамики реактора полного смешения), а также стационарных режимов объектов с распределенными параметрами по одной пространственной координате. В первом случае независимой переменной является время, а во втором — пространственная координата. Следует отметить общность, и даже тождественность математических описаний, которая иногда свойственна математическим моделям различных объектов. Речь идет о нестационарных моделях периодически действующих аппаратов полного смешения и стационарных моделях аппаратов идеального вытеснения. В первом случае имеем (для реакции $A + B \xrightarrow{k} P$)

$$\frac{dC_A}{dt} + kC_A C_B = 0,$$

$$\frac{dC_B}{dt} + kC_A C_B = 0, \quad (1.9)$$

$$C_A = C_A^0, \quad C_B = C_B^0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

а во втором случае

$$\begin{aligned} v \frac{dC_A}{dx} + skC_A C_B &= 0, \\ v \frac{dC_B}{dx} + skC_A C_B &= 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$C_A = C_A^{BX}, \quad C_B = C_B^{BX} \quad \text{при} \quad x = 0,$$

где s - поперечное сечение реактора; v - объемный расход; C_A^0 , C_B^0 , C_A^{BX} , C_B^{BX} - соответственно начальные и входные концентрации веществ A и B .

Как видно, системы уравнений (1.9), (1.10) совпадают с точностью до коэффициентов. Тождественность математического описания при этом позволяет сделать заключение о тождественности оптимальных решений, хотя практическая реализация оптимальных условий в обоих случаях может существенно различаться.

Сложность решения обыкновенных дифференциальных уравнений определяется рядом обстоятельств. Во-первых, она возрастает с ростом порядка уравнения (или, что практически эквивалентно этому, с ростом числа дифференциальных уравнений в системе, поскольку уравнение n -го порядка всегда можно преобразовать в систему, состоящую из n уравнений первого порядка).

На сложность решения еще существеннее влияет линейность или нелинейность уравнений. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения решаются гораздо проще; для них разработан ряд специальных методов, например операционное исчисление. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами имеют простое аналитическое решение. Решение систем линейных дифференциальных уравнений — задача, к решению которой хорошо приспособлены аналоговые вычислительные машины.

Нелинейность резко усложняет решение, и, как правило, в этом случае требуется использование численных методов.

При решении систем дифференциальных уравнений часто приходится сталкиваться со свойством "жесткости" системы, заключающемся в значительном разбросе собственных значений матрицы системы, что не позволяет использовать обычные методы решения. В таких случаях необходимо применять специально разработанные алгоритмы.

Важной особенностью математического описания, содержащего обыкновенные дифференциальные уравнения, является необходимость задания начальных условий.

Дифференциальные уравнения в частных производных используют для математического описания динамики объектов с распределенными параметрами или стационарных режимов объектов с параметрами, распределенными по нескольким координатам. Для указанных уравнений при описании динамики объекта наряду с начальными условиями нужно также задавать граничные условия, в общем случае являющиеся функциями времени. Для стационарных режимов объектов, описываемых уравнениями в частных производных, задают только граничные условия. Задачи с уравнениями в частных производных, как правило, отличаются наибольшей сложностью, и в большинстве случаев решение каждой конкретной задачи требует серьезной работы.

Примером объекта, описываемого этим классом уравнений, является аппарат идеального вытеснения, работающий в нестационарных условиях, в котором протекает реакция $A + B \xrightarrow{k} P$. В этом случае получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_A}{\partial x} + v \frac{\partial C_A}{\partial t} + sk C_A C_B &= 0, \\ \frac{\partial C_B}{\partial x} + v \frac{\partial C_B}{\partial t} + sk C_A C_B &= 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$C_A = C_{A_H}(x), \quad C_B = C_{B_H}(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (1.12)$$

$$C_A = C_{A_p}(t), \quad C_B = C_{B_p}(t) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (1.13)$$

здесь v — объемный расход; s - поперечное сечение.

Исследование объектов, описываемых дифференциальными уравнениями, иногда представляет собой весьма трудную вычислительную задачу. Поэтому в ряде случаев вместо математического описания объекта дифференциальными уравнениями используют его описание системой конечно-разностных уравнений, для чего непрерывный объект с распределенными параметрами рассматривают как дискретный с сосредоточенными параметрами, но имеющий ячеечную структуру. Формально математически замена непрерывного объекта дискретным эквивалентна замене дифференциальных уравнений разностными соотношениями. При этом для объектов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, математическое описание представляют в виде системы конечно-разностных уравнений. Для процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, результатом является система дифференциально-разностных уравнений, каждое из которых, в свою очередь, может быть представлено системой конечно-разностных уравнений. При подобных преобразованиях системы уравнений математического описания, естественно, возникает погрешность, которую необходимо учитывать при оценке результатов моделирования.

Вместе с тем существует ряд объектов, которые по своей природе обладают ячеечной структурой. Типичными примерами служат секционированные реакторы, тарельчатые колонны и т.д. Поэтому ячеечные модели являются не только удобной

формой аппроксимации для объектов, описываемых дифференциальными уравнениями, но и имеют вполне определенное самостоятельное значение.

Общее математическое описание нестационарных объектов представляют в виде совокупности дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных), отражающих изменение переменных процесса во времени. Каждую переменную можно охарактеризовать временем релаксации t_j , в течение которого переменная изменяется на определенную долю от полного диапазона ее изменения при постоянных значениях остальных переменных. Пусть при этом все переменные объекта можно разделить на две группы, для одной из которых $t_i \leq t^I$, а для другой $t_i \geq t^II$, и, кроме того, справедливо соотношение $t^I < t^II$, означающее, что время релаксации переменных первой группы значительно меньше времени релаксации переменных второй группы. Тогда с некоторой степенью погрешности можно принять, что переменные первой группы, имеющие значительно меньшее время релаксации, безинерционны, и считать в уравнениях математического описания производные от указанных переменных по времени равными нулю. С помощью такого приема иногда удается весьма существенно упростить нестационарную математическую модель благодаря замене части дифференциальных уравнений конечными. Математические модели, в которых нестационарные дифференциальные уравнения, описывающие изменения во времени переменных с малым временем релаксации, заменены стационарными уравнениями, можно назвать *квазинестационарными*. Нестационарные модели, используемые на практике, фактически обычно являются квазинестационарными, хотя при этом, строго говоря, необходимо обоснование квазистационарности ряда внутренних переменных.

С учетом сказанного математические модели можно классифицировать следующим образом:

по пространственным признакам — модели с сосредоточенными параметрами; ячеечные модели; модели с распределенными параметрами;

по временным признакам - стационарные модели; квазинестационарные модели; нестационарные модели.

Лекция №5

КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ.

План:

1. Классификация видов моделирования систем.
2. Мысленное моделирование.
3. Математическое моделирование.
4. Методы исследования аналитической модели.
5. Имитационное моделирование.

В основе моделирования лежит *теория подобия*, которая утверждает, что абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта другим точно таким же. При моделировании абсолютное подобие не имеет места и стремятся к тому, чтобы модель достаточно хорошо отображала исследуемую сторону функционирования объекта. Поэтому в качестве одного из первых признаков классификации видов моделирования можно выбрать степень полноты модели и разделить модели в соответствии с этим признаком на полные, неполные и приближенные. В основе полного моделирования лежит полное подобие, которое проявляется как во времени, так и в пространстве. Для неполного моделирования характерно неполное подобие модели изучаемому объекту. В основе приближенного моделирования лежит приближенное подобие, при котором некоторые стороны функционирования реального объекта не моделируются совсем.

Классификация видов моделирования систем S приведена на рис.1.3. В зависимости от характера изучаемых процессов в системе S все виды моделирования могут быть разделены на детерминированные и стохастические, статические и динамические, дискретные, непрерывные и дискретно - непрерывные. *Детерминированное моделирование* отображает детерминированные процессы, т. е. процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий; *стохастическое моделирование* отображает вероятностные процессы и события. В этом случае анализируется ряд реализаций случайного процесса и оцениваются средние характеристики, т. е. набор однородных реализаций. *Статическое моделирование* служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени, а *динамическое моделирование* отражает поведение объекта во времени. *Дискретное моделирование* служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, соответственно непрерывное моделирование позволяет отразить непрерывные процессы в системах, а *дискретно-непрерывное моделирование* используется для случаев, когда хотят выделить наличие как дискретных, так и непрерывных процессов.

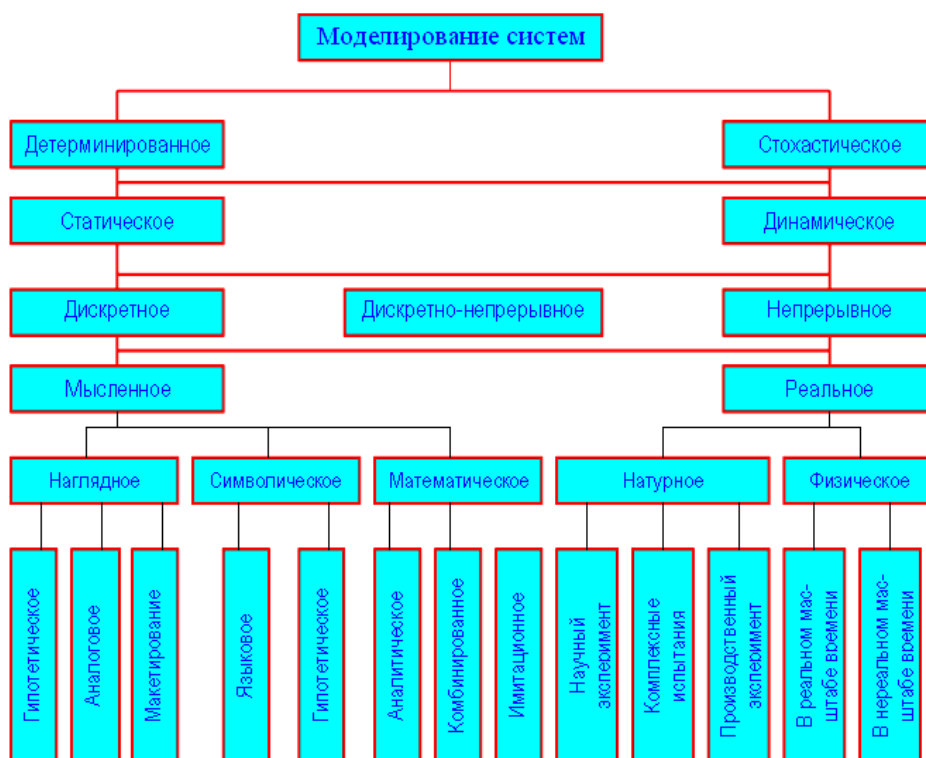


Рис.1.3.. Классификация видов моделирования систем

В зависимости от формы представления объекта (системы S) можно выделить мысленное и реальное моделирование.

Мысленное моделирование.

Мысленное моделирование часто является единственным способом моделирования объектов, которые либо практически не реализуемы в заданном интервале времени, либо существуют вне условий, возможных для их физического создания. Например, на базе мысленного моделирования могут быть проанализированы многие ситуации микромира, которые не поддаются физическому эксперименту. Мысленное моделирование может быть реализовано в виде наглядного, символического и математического.

Наглядное моделирование.

При ***наглядном моделировании*** на базе представлений человека о реальных объектах создаются различные наглядные модели, отображающие явления и процессы, протекающие в объекте. В основу ***гипотетического моделирования*** исследователем закладывается некоторая гипотеза о закономерностях протекания процессов реальном объекте, которая отражает уровень знаний исследователя об объекте и базируется на причинно-следственных связях между входом и выходом изучаемого объекта. Гипотетическое моделирование используется, когда знаний об объекте недостаточно для построения формальных моделей.

Аналоговое моделирование.

Аналоговое моделирование основывается на применении аналогий различных уровней. Наивысшим уровнем является полная аналогия, имеющая место только для достаточно простых объектов. С усложнением объекта используют аналогии последующих уровней, когда аналоговая модель отображает несколько либо только одну сторону функционирования объекта.

Существенное место при мысленном наглядном моделировании занимает **макетирование**. Мысленный макет может применяться в случаях, когда протекающие в реальном объекте процессы не поддаются физическому моделированию, либо может предшествовать проведению других видов моделирования. В основе построения мысленных макетов также лежат аналогии, однако обычно базирующиеся на причинно-следственных связях между явлениями и процессами в объекте. Если ввести условное обозначение отдельных понятий, т. е. знаки, а также определенные операции между этими знаками, то можно реализовать **знаковое моделирование** и с помощью знаков отображать набор понятий — составлять отдельные цепочки из слов и предложений. Используя операции объединения, пересечения и дополнения теории множеств, можно в отдельных символах дать описание какого-то реального объекта.

Языковое моделирование.

В основе языкового моделирования лежит некоторый тезаурус. Последний образуется из набора входящих понятий, причем этот набор должен быть фиксированным. Следует отметить, что между тезаурусом и обычным словарем имеются принципиальные различия. Тезаурус — словарь, который очищен от неоднозначности, т. е. в нем каждому слову может соответствовать лишь единственное понятие, хотя в обычном словаре одному слову могут соответствовать несколько понятий.

Символическое моделирование представляет собой искусственный процесс создания логического объекта, который замещает реальный и выражает основные свойства его отношений с помощью определенной системы знаков или символов.

Для исследования характеристик процесса функционирования любой системы 5 математическими методами, включая и машинные, должна быть проведена формализация этого процесса, т. е. построена математическая модель.

Математическое моделирование.

Под математическим моделированием будем понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики

рассматриваемого реального объекта. Вид математической модели зависит как от природы реального объекта, так и от задач исследования объекта и требуемой достоверности и точности решения этой задачи. Любая математическая модель, как и всякая другая, описывает реальный объект лишь с некоторой степенью приближения к действительности. Математическое моделирование для исследования характеристик процесса функционирования систем можно разделить на аналитическое, имитационное и комбинированное.

Для аналитического моделирования характерно то, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегро-дифференциальных, конечно-разностных и т. п.) или логических условий.

Методы исследования аналитической модели.

Аналитическая модель может быть исследована следующими методами:

а) аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для искомым характеристик;

б) численным, когда, не умея решать уравнений в общем виде, стремятся получить числовые результаты при конкретных начальных данных;

в) качественным, когда, не имея решения в явном виде, можно найти некоторые свойства решения (например, оценить устойчивость решения).

Наиболее полное исследование процесса функционирования системы можно провести, если известны явные зависимости, связывающие искомые характеристики с начальными условиями, параметрами и переменными системы S . Однако такие зависимости удается получить только для сравнительно простых систем. При усложнении систем исследование их аналитическим методом наталкивается на значительные трудности, которые часто бывают непреодолимыми. Поэтому, желая использовать аналитический метод, в этом случае идут на существенное упрощение первоначальной модели, чтобы иметь возможность изучить хотя бы общие свойства системы. Такое исследование на упрощенной модели аналитическим методом помогает получить ориентировочные результаты для определения более точных оценок другими методами.

Численный метод позволяет исследовать по сравнению с аналитическим методом более широкий класс систем, но при этом полученные решения носят частный характер. Численный метод особенно эффективен при использовании ПК.

В отдельных случаях исследователя системы могут удовлетворить и те выводы, которые можно сделать при использовании качественного метода анализа математической модели. Такие качественные методы широко используются, например, в теории автоматического управления для оценки эффективности различных вариантов систем управления.

В настоящее время распространены методы машинной реализации исследования характеристик процесса функционирования больших систем. Для

реализации математической модели на ЭВМ необходимо построить соответствующий 'моделирующий алгоритм.

Имитационное моделирование.

При имитационном моделировании реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы S во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы S .

Основным преимуществом имитационного моделирования по сравнению с аналитическим является возможность решения более сложных задач. Имитационные модели позволяют достаточно просто учитывать такие факторы, как наличие дискретных и непрерывных элементов, нелинейные характеристики элементов системы, многочисленные случайные воздействия и др., которые часто создают трудности при аналитических исследованиях. В настоящее время имитационное моделирование — наиболее эффективный метод исследования больших систем, а часто и единственный практически доступный метод получения информации о поведении системы, особенно на этапе ее проектирования.

Когда результаты, полученные при воспроизведении на имитационной модели процесса функционирования системы S , являются реализациями случайных величин и функций, тогда для нахождения характеристик процесса требуется его многократное воспроизведение с последующей статистической обработкой информации и целесообразно в качестве метода машинной реализации имитационной модели использовать метод статистического моделирования. Первоначально был разработан метод статистических испытаний, представляющий собой численный метод, который применялся для моделирования случайных величин и функций, вероятностные характеристики которых совпадали с решениями аналитических задач (такая процедура получила название метода Монте - Карло). Затем этот прием стали применять и для машинной имитации с целью исследования характеристик процессов функционирования систем, подверженных случайным воздействиям, т. е. появился метод статистического моделирования

Таким образом, метод статистического моделирования будем в дальнейшем называть методом машинной реализации имитационной модели, а методом статистических испытаний (Монте - Карло) будем называть численный метод решения аналитической задачи.

Метод имитационного моделирования позволяет решать задачи анализа больших систем S , включая задачи оценки: вариантов структуры системы, эффективности различных алгоритмов управления системой, влияния изменения различных параметров системы. Имитационное моделирование может быть положено также в основу структурного, алгоритмического и

параметрического синтеза больших систем, когда требуется создать систему с заданными характеристиками при определенных ограничениях, которая является оптимальной по некоторым критериям оценки эффективности.

При решении задач машинного синтеза систем на основе их имитационных моделей, помимо разработки моделирующих алгоритмов для анализа фиксированной системы, необходимо также разработать алгоритмы поиска оптимального варианта системы. Далее в методологии машинного моделирования будем различать два основных раздела: статику и динамику, основным содержанием которых являются соответственно вопросы анализа и синтеза систем, заданных моделирующими алгоритмами.

Комбинированное моделирование.

Комбинированное (аналитико-имитационное) моделирование при анализе и синтезе систем позволяет объединить достоинства аналитического и имитационного моделирования. При построении комбинированных моделей проводится предварительная декомпозиция процесса функционирования объекта на составляющие подпроцессы, и для тех, из них, где это возможно, используются аналитические модели, а для остальных под процессов строятся имитационные модели. Такой комбинированный подход позволяет охватить качественно новые классы систем, которые не могут быть исследованы с использованием только аналитического и имитационного моделирования в отдельности.

Реальное моделирование.

При *реальном моделировании* используется возможность исследования различных характеристик либо на реальном объекте целиком, либо на его части. Такие исследования могут проводиться как на объектах, работающих в нормальных режимах, так и при организации специальных режимов для оценки интересующих исследователя характеристик (при других значениях переменных и параметров, в другом масштабе времени и т. д.). Реальное моделирование является наиболее адекватным, но при этом его возможности с учетом особенностей реальных объектов ограничены. Например, проведение реального моделирования АСУ предприятием потребует, во-первых, создания такой АСУ, а во-вторых, проведения экспериментов с управляемым объектом, т. е. предприятием, что в большинстве случаев невозможно. Рассмотрим разновидности реального моделирования.

Особое место в моделировании занимает кибернетическое моделирование, в котором отсутствует непосредственное подобие физических процессов, происходящих в моделях, реальным процессам. В этом случае стремятся отобразить лишь некоторую функцию и рассматривают реальный объект как «черный ящик», имеющий ряд входов и выходов, и моделируются некоторые связи между выходами и входами. Чаще всего при использовании кибернетических моделей проводят анализ поведенческой стороны объекта при различных воздействиях внешней среды. Таким образом, в основе

кибернетических моделей лежит отражение некоторых информационных процессов управления, что позволяет оценить поведение реального объекта. Для построения имитационной модели в этом случае необходимо выделить исследуемую функцию реального объекта, попытаться формализовать эту функцию в виде некоторых операторов связи между входом и выходом и воспроизвести на имитационной модели данную функцию, причем на базе совершенно иных математических соотношений и, естественно, иной физической реализации процесса.

Лекция № 6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИ ОБЕКТОВ

План:

1. Математические модели объектов проектирования.
2. Технологические модели.
3. Структурные ММ.
4. Функциональные ММ.

Математические модели объектов проектирования

Математическое описание проектируемого объекта называют математической моделью. Математическая модель — это совокупность математических элементов (чисел, переменных, векторов, множеств) и отношений между ними, которые с требуемой для проектирования точностью описывают свойства проектируемого объекта. На каждом этапе проектирования используется свое математическое описание проектируемого объекта, сложность которого должна быть согласована с возможностями анализа на ЭВМ, что приводит к необходимости иметь для одного объекта несколько моделей различного уровня сложности.

В общей теории математического моделирования математическую модель любого объекта характеризуют внутренними, внешними, выходными параметрами и фазовыми переменными. Внутренние параметры модели определяются характеристиками компонентов, входящих в проектируемый объект, например номиналы элементов принципиальной схемы. Если проектируемый объект содержит n элементарных компонентов, то и его математическая модель будет определяться параметрами, которые образуют вектор внутренних параметров $W = |w_1 \dots w_n|^T$. Каждый из параметров w_i , в свою очередь, может быть функцией, вектором или еще более сложным математическим функционалом в зависимости от объекта проектирования.

Выходные параметры модели — это показатели, характеризующие функциональные, эксплуатационные, конструкторско-технологические, экономические и другие характеристики проектируемого объекта. К таким показателям могут относиться коэффициенты передачи, масса и габариты проектируемого объекта, надежность, стоимость и т.п. Понятия внутренних и выходных параметров инвариантны, при моделировании на более сложном уровне выходные параметры могут стать внутренними и наоборот. Например, сопротивление резистора является внутренним параметром при моделировании усилительного устройства, компонентом которого он является, но это же сопротивление будет выходным параметром при моделировании самого резистора, что требуется при пленочном его исполнении. Вектор выходных параметров модели будем обозначать

$$\bar{F} = |f_1 \dots f_k|^T.$$

Внешние параметры модели — это характеристики внешней по отношению к проектируемому объекту среды, а также рабочие управляющие воздействия. Вектор внешних параметров в общем случае содержит множество самых различных составляющих. К его составляющим с полным правом можно отнести все, что говорилось ранее о составляющих вектора внутренних параметров. Будем обозначать его

$$\bar{Q} = |q_1 \dots q_m|^T.$$

Уравнения математической модели могут связывать некоторые физические характеристики компонентов, которые полностью характеризуют состояние объекта, но не являются выходными или внутренними параметрами модели (например, токи и напряжения в радиоэлектронных устройствах, внутренними параметрами которых являются номиналы элементов электрических схем, а выходными параметрами — выходная мощность, коэффициент передачи). Такие характеристики называют фазовыми переменными. Минимальный по размерности вектор фазовых переменных $v = |v_1 \dots v_r|^T$, полностью характеризующий работу объекта проектирования, называют базисным вектором. Например, при составлении уравнений математической модели радиоэлектронных устройств в качестве базисного вектора V можно использовать вектор узловых потенциалов либо вектор напряжений на конденсаторах и токов в индуктивностях — переменные состояния. Использование вектора фазовых переменных позволяет упростить алгоритмическую реализацию программ, составляющих уравнения математической модели устройства.

В общем случае выходные параметры F представляются операторами от векторов V, W, Q и могут быть определены из решения системы уравнений математической модели устройства. С учетом вышесказанного математическая модель любого радиотехнического объекта может быть представлена в виде следующих систем уравнений:

$$\bar{\varphi}(\bar{V}, \bar{W}, \bar{Q}) = 0; \quad (1)$$

$$\bar{F} = \bar{\psi}(\bar{V}), \quad (2)$$

где $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ — операторы, определяющие вид систем уравнений модели

Система уравнений (1) может представлять собой систему линейных алгебраических уравнений, нелинейных уравнений различного вида, дифференциальных в полных или частных производных, и является собственно математической моделью проектируемого объекта. В результате решения системы (14.1) определяются действующие в устройстве фазовые переменные V . Система уравнений (2) определяет зависимость выходных параметров объекта от фазовых переменных V .

В частных случаях составляющие вектора V могут являться внутренними или выходными параметрами объекта, и тогда системы уравнений (1) и (2) упрощаются.

Часто моделированием называют лишь составление системы (1). Решение уравнений (1) и отыскание вектора F с помощью уравнения (2) называют анализом математической модели.

На каждом уровне моделирования различают математические модели проектируемого радиотехнического объекта и компонентов, из которых состоит объект. Математические модели компонентов представляют собой системы уравнений, которые устанавливают связь между фазовыми переменными, внутренними и внешними параметрами, относящимися к данному компоненту. Эти уравнения называют компонентными, а соответствующую модель — компонентной.

Математическую модель объекта проектирования, представляющего объединение компонентов, получают на основе математических моделей компонентов, входящих в объект. Объединение компонентных уравнений в математическую модель объекта осуществляется на основе фундаментальных физических законов, выражающих условия непрерывности и равновесия фазовых переменных, например законов Кирхгофа. Уравнения, описывающие эти законы, называют топологическими; они отражают связи между компонентами в устройстве. Совокупность компонентных и топологических уравнений для проектируемого объекта и образует систему (14.1), являющуюся математической моделью объекта.

Исходя из задач конкретного этапа проектирования, математическая модель проектируемого объекта должна отвечать самым различным требованиям:

- отражать с требуемой точностью зависимость выходных параметров объекта от его внутренних и внешних параметров в широком диапазоне их изменения;

- иметь однозначное соответствие физическим процессам в объекте;

- включать необходимые аппроксимации и упрощения, которые позволяют реализовать ее программно на ЭВМ с различными возможностями;

- иметь большую универсальность, т.е. быть применимой к моделированию многочисленной группы однотипных устройств;

- быть экономичной с точки зрения затрат машинных ресурсов и т. п.

Эти требования в своем большинстве являются противоречивыми, и удачное компромиссное удовлетворение этих требований в одних задачах может оказаться далеким от оптимальности в других. По этой причине для одного и того же компонента или устройства часто приходится иметь не одну, а несколько моделей. В связи с этим классификация моделей должна выполняться по множеству признаков, чтобы описать все возможные случаи.

По уровню сложности различают полные модели и макромоделли. Полные модели объекта проектирования получаются путем непосредственного объединения компонентных моделей в общую систему уравнений. Макромоделли представляют собой упрощенные математические модели, аппроксимирующие полные.

В свою очередь, макромоделли делят на две группы: факторные и фазовые модели.

Факторные модели предназначены для использования на последующих этапах проектирования.

Фазовые макромоделли предназначены для использования на том же этапе проектирования, на котором их получают, для сокращения размерности решаемой задачи.

По способу получения математические модели радиотехнических объектов делят на физические и формальные. Физические модели получают на основе изучения физических закономерностей функционирования проектируемого объекта, так что структура уравнений и параметры модели имеют ясное физическое толкование.

Формальные модели получают на основе измерения и установления связи между основными параметрами объекта в тех случаях, когда физика работы его известна недостаточно полно. Как правило, формальные модели требуют большого числа измерений и по своей природе являются локальными, справедливыми вблизи тех режимов, в которых производились измерения. Такие модели называют моделями "черного ящика".

В современных системах автоматизированного проектирования формирование системы уравнений математической модели проектируемого объекта выполняется автоматически с помощью ЭВМ. В зависимости от того, что положено в основу алгоритма формирования системы уравнений, модели радиоэлектронных объектов можно разделить на электрические, физико-топологические и технологические.

Понятие электрической модели включает либо систему уравнений, связывающих напряжения и токи в электрической схеме, являющейся моделью объекта, либо саму электрическую схему, составленную из базовых элементов (резисторов, конденсаторов), на основе которой можно в ЭВМ получить систему уравнений, связывающих напряжения и токи в модели объекта.

В физико-топологических моделях исходными параметрами являются геометрические размеры определяющих областей проектируемого объекта и электрофизические характеристики материала, из которых они состоят. В результате решения системы уравнений этой модели поля находятся внутри и на внешних выводах устройства. Такие модели применяются при разработке полупроводниковых приборов, СВЧ-устройств и в ряде других случаев.

Технологические модели основываются на параметрах технологических процессов изготовления проектируемого объекта (температура и время диффузии, концентрация диффузанта). Выходные параметры такой модели — совокупность физико-топологических либо технологических параметров.

По способу задания внутренних и внешних параметров математические модели делят на дискретные и непрерывные.

Различают модели статические и динамические в зависимости от того, учитывают ли уравнения модели инерционности процессов в проектируемом объекте или нет. Статические модели отражают состояние объекта

проектирования при неизменных внешних параметрах и не учитывают его переходные характеристики. Динамические модели дополнительно отражают переходные процессы в объекте, происходящие при изменении во времени внешних параметров.

Существуют и другие варианты классификации математических моделей элементов и узлов радиоустройств.

Программа моделирования радиотехнических и других объектов должна автоматически формировать систему уравнений математической модели из базового набора элементарных схемных элементов, компонентные уравнения для которых хранятся в библиотеке программы.

Рассмотрим основные признаки, классификации и типы математических моделей (ММ), применяемых в САПР.

По характеру отображаемых свойств объекта ММ делятся на структурные и функциональные.

Структурные ММ предназначены для отображения структурных свойств объекта. Различают структурные ММ топологические и геометрические.

В топологических ММ отображаются состав и взаимосвязи элементов. Их чаще всего применяют для описания объектов, состоящих из большого числа элементов, при решении задач привязки конструктивных элементов к определенным пространственным позициям (например, задачи компоновки оборудования, размещения деталей, трассировки соединений) или к относительным моментам времени (например, при разработке расписаний, технологических процессов). Топологические модели могут иметь форму графов, таблиц (матриц), списков и т.п.

В геометрических ММ отображаются свойства объектов, в них дополнительно к сведениям о взаимном расположении элементов содержатся сведения о форме деталей. Геометрические ММ могут выражаться совокупностью уравнений линий и поверхностей; совокупностью алгебраических соотношений, описывающих области, составляющие тело объекта; графами и списками, отображающими конструкции из типовых конструктивных элементов, и т.п. Геометрические ММ применяют при решении задач конструирования в машиностроении, приборостроении, радиоэлектронике, для оформления конструкторской документации, при задании исходных данных на разработку технологических процессов изготовления деталей. Используют несколько типов геометрических ММ.

Функциональные ММ предназначены для отображения физических или информационных процессов, протекающих в объекте при его функционировании или изготовлении. Обычно функциональные ММ представляют собой системы уравнений, связывающих фазовые переменные, внутренние, внешние и выходные параметры.

По степени детализации описания в пределах каждого иерархического уровня выделяют полные ММ и макромоделли.

Полная модель - эта модель, в которой фигурируют фазовые переменные, характеризующие состояния всех имеющихся межэлементных связей (т.е. состояние всех элементов проектируемого объекта).

Макромодель- ММ, в которой отображаются состояния значительно меньшего числа межэлементных связей, что соответствует описанию объекта при укрупненном выделении элементов.

По способу представления свойств объекта функциональные ММ делятся на аналитические и алгоритмические.

Аналитические ММ представляют собой явные выражения выходных параметров как функций входных и внутренних параметров.

Алгоритмические ММ выражают связи выходных параметров с параметрами внутренними и внешними в форме алгоритма.

Имитационная ММ- это алгоритмическая модель, отражающая поведение исследуемого объекта во времени при задании внешних воздействий на объект.

Лекция № 7

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРИНЦИПЫ АНАЛИЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

План:

1. Принципы анализа систем управления.
2. Основные этапы математического моделирования.
3. Примеры математических моделей.

Невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического моделирования, суть которого состоит в замене исходного объекта его образом – математической моделью и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов. Этот метод сочетает в себе достоинства, как теории, так и эксперимента, поскольку работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в различных ситуациях. В то же время вычислительные эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических средств информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам.

Вышесказанное является актуальным в условиях постоянного роста требований к эффективности устройств, применяемых в системах передачи и обработки информации, к сокращению сроков исследования и разработки новых телекоммуникационных систем и сетей.

Моделирование можно рассматривать как замещение исследуемого объекта (оригинала) его условным образом, описанием или другим объектом, именуемым моделью и обеспечивающим близкое к оригиналу поведение в рамках некоторых допущений и приемлемых погрешностей. Моделирование обычно выполняется с целью познания свойств оригинала путем исследования его модели, а не самого объекта. Разумеется, моделирование оправдано в том случае когда оно проще создания самого оригинала или когда последний по каким-то причинам лучше вообще не создавать.

МОДЕЛЬ ("модель" от лат. "modelus", что означает "мера") -мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отражая и воспроизводя объект исследования, способна замещать его при определенных условиях так, что изучение ее дает новую информацию об этом объекте. М. в самом широком смысле - это любой мысленный или знаковый образ моделируемого объекта (оригинала).

Таким образом, под *моделью мы будем понимать совокупность объектов (понятий, свойств, признаков, знаков, геометрических элементов, материальных предметов) и отношений между ними (называемых моделирующими), которые выражают существенные с точки зрения цели моделирования стороны изучаемого объекта, явления или процесса.* Короче,

модель - это некоторое упрощённое подобие реального объекта, процесса или явления.

М. строится для достижения определенной цели, однако для одного и того же объекта можно построить, преследуя одну и ту же цель, разные модели. Поэтому можно считать, что М. некоторого объекта А (оригинала, прототипа) – это объект В, в каком-то отношении подобный (аналогичный) оригиналу А, но отличающийся от него, выбранный или построенный, по крайней мере, для одной из следующих целей:

1) замена оригинала А моделью В в некотором реальном или воображаемом действии, исходя из того, что В более удобна для осуществления этого действия в данных условиях (т.н. называемая *модель-заместитель*);

2) создание наглядного представления об объекте А (реально существующем или воображаемом) с помощью объекта В (т.н. называемая *модель-представление*);

3) истолкование (интерпретация) объекта А в виде модели В (т.н. называемая *модель-интерпретация*);

4) исследование (изучение) объекта А посредством изучения объекта В (т.н. называемая *исследовательская модель*).

Пример.1. В курсе математики представлены все перечисленные виды моделей. Так, уравнение, составленное по условию текстовой задачи, выступает как модель-заместитель исходной задачи; чертеж некоторого геометрического объекта, построенный для доказательства утверждения, в котором идет речь в этом утверждении, является моделью-представлением рассматриваемого объекта; уравнение $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ является моделью-интерпретацией окружности.

М. обычно обладает не одним каким-либо признаком, соответствующим одной из указанных целей, а несколькими, и поэтому она пригодна, как правило, и для других целей. Например, модель-заместитель может использоваться и как модель-представление, и как модель-интерпретация, и как исследовательская модель. Так, модель-интерпретация окружности вполне пригодна для исследования свойств окружности, а, значит, она является и моделью исследовательской.

По способу построения модели бывают *материальные* и *идеальные*. В качестве материальных моделей могут выступать копии оригинала (уменьшенные или увеличенные), причем они могут быть *динамические* и *статические*; в качестве идеальных - изображения, описания, схемы, чертежи, графики, уравнения, планы, карты, компьютерные программы и т.д.

Пример 2. В медицине многие лекарственные препараты, разрабатываемые для лечения людей, первоначально испытывают на животных, которые в этом случае и выступают в качестве модели человека; моделью некоторой местности может служить географическая карта, пользуясь которой, мы получаем нужную нам информацию об этой местности; моделью прямолинейного равномерного движения служит уравнение $s=v_0+vt$, исследование которого дает возможность устанавливать основные закономерности данного вида

движения; моделью некоторого предмета, явления, процесса или ситуации (как реальных, так и «виртуальных») могут служить компьютерные программы, предоставляющие в распоряжение исследователя практически неограниченные возможности для их изучения и прогнозирования развития; и т.п.

М. всегда является лишь отображением оригинала, и она в каком-либо отношении должна быть не только удобна для изучения свойств исследуемого объекта, но и позволяет перенести полученные при этом знания на исходный объект. Например, когда в начальной школе учитель намеревается более наглядно продемонстрировать способ сложения натуральных чисел, то он использует для этого различные модели этих чисел: реальные предметы или их изображения, абак, русские счеты, и др. Многие детские игрушки, представляющие собой модели реальных объектов (автомобилей, поездов, животных и т.п.), позволяют ребенку познавать определенные свойства окружающих его предметов.

М. строится с тем расчетом, чтобы охватить только те свойства оригинала, которые *существенны в данной ситуации* и являются объектом изучения. Например, существует разнообразие модели обучения математике; одни из них позволяют исследовать степень усвоения материала, другие – познавательную активность, третьи – творческую математическую деятельность, и т.д. Для изучения поведения проектируемого самолета в воздухе строят уменьшенную во много раз его модель и помещают ее в аэродинамическую трубу. Затем по поведению этой модели в различных воздушных потоках, создаваемых в трубе, судят о том, как будет вести себя в полете настоящий самолет.

М., полностью воспроизводящая оригинал, перестает быть моделью.

Существует ряд общих требований к моделям:

1. **Адекватность** – достаточно точное отображение свойств объекта;
2. **Полнота** – предоставление получателю всей необходимой информации об объекте;
3. **Гибкость** – возможность воспроизведения различных ситуаций во всем диапазоне изменения условий и параметров;
4. **Трудоемкость** – разработки должна быть приемлемой для имеющегося времени и программных средств.

Моделирование – это процесс построения модели объекта и исследования его свойств путем исследования модели.

Таким образом, моделирование предполагает 2 основных этапа:

1. Разработка модели;
2. Исследование модели и получение выводов.

При этом на каждом из этапов решаются разные задачи и используются отличающиеся по сути методы и средства.

Метод моделирования во многих науках является средством, позволяющим устанавливать более глубокие и сложные взаимосвязи между теорией и опытом и способным заменить эксперимент. Целый ряд исследований вообще невозможен без моделирования, потому, что:

а) эксперименты могут проводиться лишь на ныне существующих объектах, т.к. невозможно распространить эксперимент в область прошлого;

б) вмешательство в некоторые системы иногда имеет такой характер, что невозможно установить причины появившихся изменений (вследствие вмешательства или по другим причинам);

в) некоторые теоретически возможные эксперименты неосуществимы вследствие низкого уровня развития экспериментальной техники или ее высокой стоимости;

г) большую группу экспериментов, связанных с человеком, следует отклонить по морально-этическим соображениям.

Однако М. находит широкое применение не только из-за того, что может заменить эксперимент. Оно имеет большое самостоятельное значение и свои преимущества:

1. С помощью метода моделирования на одном комплексе данных можно разработать целый ряд различных моделей, по-разному интерпретировать исследуемое явление, и выбрать наиболее плодотворную из них для теоретического истолкования.

2. В процессе построения модели можно сделать различные дополнения к исследуемой гипотезе и получить ее упрощение.

3. В случае сложных моделей можно применять компьютерную технику.

4. Существует возможность проведения модельных экспериментов. И др.

На практике применяют различные методы моделирования. В зависимости от способа реализации, все модели можно разделить на два больших класса: физические и математические.

Математическое моделирование принято рассматривать как средство исследования процессов или явлений с помощью их математических моделей.

Под физическим моделированием понимается исследование объектов и явлений на физических моделях, когда изучаемый процесс воспроизводят с сохранением его физической природы или используют другое физическое явление, аналогичное изучаемому. При этом физические модели предполагают, как правило, реальное воплощение тех физических свойств оригинала, которые являются существенными в конкретной ситуации. Например, при проектировании нового самолета создается его макет, обладающий теми же аэродинамическими свойствами; при планировании застройки архитекторы изготавливают макет, отражающий пространственное расположение ее элементов. В связи с этим физическое моделирование называют также макетированием.

Полунатурное моделирование представляет собой исследование управляемых систем на моделирующих комплексах с включением в состав модели реальной аппаратуры. Наряду с реальной аппаратурой в замкнутую модель входят имитаторы воздействий и помех, математические модели внешней среды и процессов, для которых неизвестно достаточно точное математическое описание. Включение реальной аппаратуры или реальных систем в контур моделирования сложных процессов позволяет уменьшить

априорную неопределенность и исследовать процессы, для которых нет точного математического описания. С помощью полунатурного моделирования исследования выполняются с учетом малых постоянных времени и нелинейностей, присущих реальной аппаратуре. При исследовании моделей с включением реальной аппаратуры используется понятие динамического моделирования, при исследовании сложных систем и явлений - эволюционного, имитационного и кибернетического моделирования.

Очевидно, действительная польза от моделирования может быть получена только при соблюдении двух условий:

1. Модель обеспечивает корректное (адекватное) отображение свойств оригинала, существенных с точки зрения исследуемой операции;
2. Модель позволяет устранить перечисленные выше проблемы, присущие проведению исследований на реальных объектах.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ – *приближенное описание какого-либо явления внешнего мира, выраженное с помощью математической символики.* Математические модели описываются с помощью средств самой математики: языка, понятий, отношений, теорий. В отличие от естественнонаучных и гуманитарных дисциплин М.м. обычно не требует создания материализованных объектов. Кроме того, если все другие науки изучают модели, то математика изучает «модели моделей». Потому ее материал в наилучшей степени соответствует задаче овладения методом моделирования.

Примером М.м. достаточно сложного оригинала служит система уравнений (и неравенств) в самом широком понимании. Система может содержать обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, интегральные уравнения, алгебраические и трансцендентные уравнения (и неравенства), набор вероятностно-статистических данных и т.д. К математическим моделям относят и программы, составленные для компьютеров, которые моделируют (отражают) определенные процессы, описанные средствами математики, положенными в основу алгоритмов.

Пример 3. Развитие ЭВМ и методологии системного анализа дало возможность для изучения широкомасштабных социальных процессов. Возникло так называемое *глобальное моделирование* и на его основе - прогнозирование мировых социальных явлений.

Основоположником и «идейным отцом» такого рода исследований считается Дж. Форрестер. В своей работе «Мировая динамика» (1971 г.) он сделал успешную попытку использовать математические методы и ЭВМ для создания варианта модели экономического развития общества с учетом двух важнейших факторов - численности населения и загрязнения окружающей среды. Расчеты показали, что при сохранении тенденций развития общества неизбежен серьезный кризис во взаимодействии человека и окружающей среды. Этот кризис объясняется противоречием между ограниченностью земных ресурсов, конечностью пригодных для сельскохозяйственной обработки площадей и все растущими темпами потребления увеличивающегося населения. Рост населения, промышленного и сельскохозяйственного

производства приводит к кризису: быстрому загрязнению окружающей среды, истощению природных ресурсов, упадку производства и повышению смертности. На основании анализа этих результатов делается вывод о необходимости стабилизации промышленного роста и материального потребления.

В 80-х годах XX века появляются оригинальные работы в области глобального моделирования в Советском Союзе. Группой ученых под руководством академика Н.Н. Моисеева в Вычислительном Центре АН СССР была сделана попытка проанализировать математическими методами структуру международной конфликтной ситуации. Основным выводом, который следовал из анализа составленной модели, состоял в следующем. Несмотря на сложную зависимость целевой функции, общей для всех партнеров (функции риска ядерной войны), в действиях участников конфликта, в такой сверхсложной и сверхопасной ситуации, какой является гонка ядерных вооружений, существует взаимовыгодный и эффективный компромисс.

М.м. отдельного элемента относительно проще - она может оказаться геометрическим образом, функцией или ее графиком, вектором, матрицей, числовой таблицей, скалярной величиной или даже конкретным числом.

Построение модели, адекватно отражающей объект, - дело непростое и требует специальных знаний и хорошей математической подготовки.

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ сводит исследование внешнего мира к математическим задачам. Процесс математического моделирования состоит из четырех этапов:

1) *формализации*, т.е. перехода от реальной практической задачи (исследуемой ситуации) к построению адекватной математической модели и формулировке на ее основе абстрактной математической задачи;

2) *решения задачи путем преобразования модели (проведение математического исследования)*, т.е. получение в результате анализа и исследования модели выходных данных (теоретических сведений);

3) *интерпретации полученного результата*, когда решение формальной математической задачи исследуется на предмет его соответствия с исходной ситуацией, истолковывается в терминах исходной ситуации и применяется к ней;

4) *модернизации модели*, т.е. построение новой более совершенной модели в связи с накоплением данных об изучаемом объекте или процессе.

Пример 4. *Разработка модели Солнечной системы.* Наблюдения звездного неба, начавшиеся еще в глубокой древности, привели к тому, что из всего многообразия небесных светил были выделены планеты, которые и стали объектом изучения. Следующим шагом явилось изучение закономерностей их движений, т.е. построение моделей и получение конкретных результатов. Модели Солнечной системы в процессе своего развития прошли через ряд усовершенствований по мере накопления экспериментальных данных и развития науки. Первой была модель Птолемея, созданная во II веке нашей эры, исходила из положения, что планеты и Солнце совершают движения вокруг

Земли (т.н. геоцентрическая модель). В XVI веке появилась модель Н. Коперника, принципиально отличающаяся от предыдущей, полагающая, что планеты вращаются вокруг Солнца по окружности (т.н. гелиоцентрическая модель). Затем появились модели И. Кеплера (начало XVII века), *И. Ньютона* (вторая половина XVII века), описывающие движения планет на математическом языке. Модель *Ньютона*, основанная на законе всемирного тяготения, вполне удовлетворительно описывала движение известных планет и давала возможность вычислять их положение на небосводе. Но вот к 40-м годам XIX в. некоторые результаты этой модели стали тоже не согласовываться с экспериментальными данными: наблюдаемое движение Урана отклонялось от теоретически вычисляемого движения. Французский ученый-астроном У. Леверье расширил систему наблюдаемых планет новой гипотетической планетой (он назвал ее Нептуном) и, пользуясь новой математической моделью, определил все основные параметры этой планеты. В указанное время и на предсказанном им месте в 1846 году астрономы убедились в реальном существовании еще одной планеты Солнечной системы. Подобные вычисления, сделанные П. Лоуэллом, привели в 1930 году к открытию девятой планеты, получившей название Плутон.

В ходе многовекового исторического развития математики сконструированы особые модели количественных отношений и пространственных форм окружающего мира. Это такие математические понятия, как число, функция, уравнение, геометрическая фигура и др. Хотя математическая модель и создается человеческим разумом, в дальнейшем она во многих случаях становится предметом объективного изучения. Познавая ее свойства, мы тем самым познаем и свойства отраженной моделью реальностей, т.е. абстрактные математические открытия обнаруживают ранее неизвестные свойства окружающего мира. Например, представление, что числа бывают только, скажем, до миллиарда (а дальше чисел нет!) прямым наблюдением вряд ли может быть опровергнуто. Только создание математиками древности такого понятия натурального числа (такой модели), при котором натуральных чисел оказывалось бесконечно много, позволяет это сделать. С помощью модели геометрии Лобачевского человечество пришло к пониманию искривленности пространства, абстрактные функциональные зависимости дают возможность предсказывать развитие тех или иных процессов, модели геометрических тел позволяют на практике определять количественные характеристики окружающих нас предметов и т.д.

Для исследования существующих и построения новых моделей в математике разработаны специальные методы. Среди них методы теории графов, теории вероятностей и математической статистики, математической логики и комбинаторики, аксиоматический метод, методы исследования элементарных функций, решения уравнений, доказательства утверждений, построения геометрических фигур, измерения величин и т.д. Так, идеи метода моделирования находят свое применение при решении текстовых задач: во-первых, само понятие текстовой задачи можно ввести, пользуясь понятием

«модель», во-вторых, понятия модели позволяет строго определить понятия «метода решения» и «способа решения» текстовой задачи.

В математике разработаны и особые методики использования на практике математических моделей, например, приемы решения задач с помощью уравнений и систем уравнений, изучение различных явлений и процессов с помощью исследования соответствующих функций, графов, геометрических фигур и т.д.

Пример 5. Общеизвестно, что, разрезая конус плоскостями, не проходящими через его вершину, мы получаем в сечении различные кривые: окружности, эллипсы, параболы, гиперболы (рис. 4.7). Их называют *коническими сечениями*. Еще древнегреческие ученые начали заниматься изучением этих кривых, т.к. они встречаются в различных явлениях природы и в человеческой деятельности (в астрономии, в военном деле, в физики и т.п.). Однако лишь, когда появились уравнения конических сечений, полученные методом координат, изучение этих кривых значительно продвинулось вперед, и были решены многие задачи, связанные с ними. Так, И. Кеплер (1609 г.) открыл из наблюдений, а *И. Ньютон* (1687 г.) теоретически обосновал, что планеты и кометы Солнечной системы движутся по этим кривым.

Заметим, что уравнения $x^2+y^2=r^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y=kx^2$ и $y = \frac{k}{x}$ выступают в качестве моделей окружности, эллипса, параболы и гиперболы, соответственно, а эти кривые в свою очередь можно рассматривать как геометрические модели указанных уравнений.

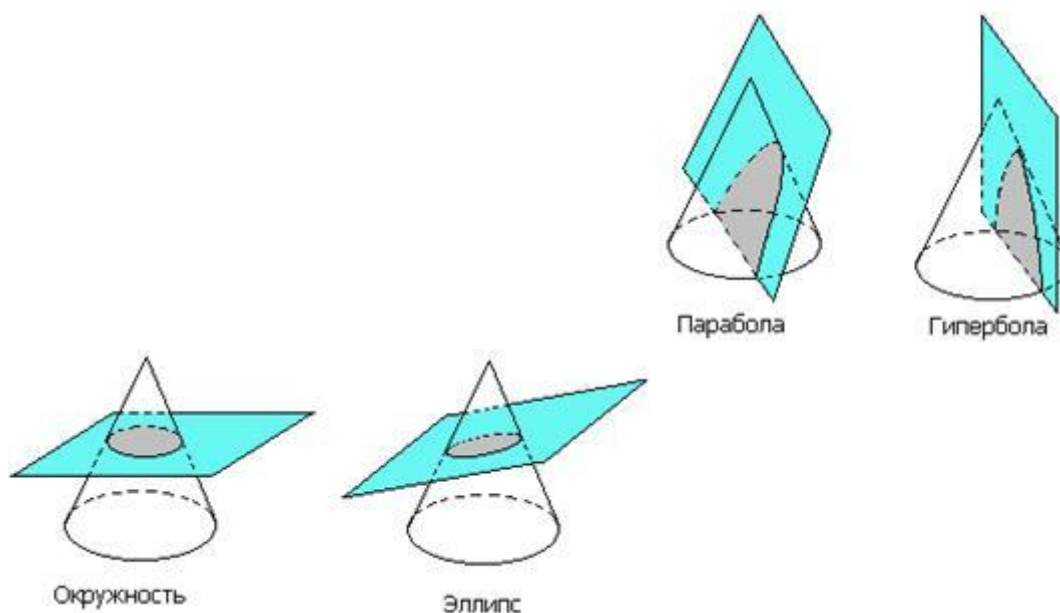


Рис. 4.7

ЗНАКОВЫЕ МОДЕЛИ. Большую роль в современной науке (т.е. не только в математике) играют *знаковые модели*. Они позволяют в виде

выражений, формул, уравнений и т.п. отображать различные процессы и существенные отношения между изучаемыми предметами и явлениями, с помощью термина (слова) или знака - вводить новое понятие. Например, выражение $a+b$ служит моделью суммы двух чисел; формула $m=2k$, где $k \in \mathbb{N}$, задает четные натуральные числа; уравнения $Zn - 2e = Zn^{2+}$ и $2H^+ + 2e = H_2$ описывают реакции с отдачей и приемом электронов. Каждому образованному человеку не составляет труда понять, что выражают формулы H_2O , H_2SO_4 , $E=mc^2$, $a^2+b^2=c^2$, $S=a \cdot b$, и знаки «=», «+», «sin», «+», «g», « $\sqrt{\quad}$ », «e», «p» соответственно в химии, физике и математике.

Часто одна и та же знаковая модель описывает различные объекты или процессы. Например, знаковая модель «A» может отображать точку, множество, высказывание, объект; модель « $y=k \cdot x$ » - зависимость между ценой, стоимостью и количеством товара; или между работой, производительностью труда и временем выполнения работы и др. С другой стороны, один и тот же процесс можно описать разными моделями. Например, реакцию взаимодействия цинка с уксусной кислотой в молекулярном виде задают уравнением $Zn + 2CH_3COOH = Zn(CH_3COO)_2 + H_2$, в молекулярно-ионном – уравнением $Zn + 2CH_3COOH = Zn^{2+} + 2CH_3COO^- + H_2$.

З.м. понятия «число». Понятие числа является одним из важнейших в математике и центральным понятием курса математики в начальной. Появившись в простейшем виде еще в первобытном обществе из потребностей счета, понятие числа совершенствовалось на протяжении всего последующего развития человеческой цивилизации. В вузе студенты, в силу выбранной профессии, изучают большинство известных числовых множеств, и они знают, что развитие понятия числа происходило под влиянием двух факторов: практической деятельности человека и внутренних потребностей математики. В процессе обучения у них формируется представление о том, что бывают порядковые числа, количественные числа, числа как меры величин и числа как компонент вычислений. Однако многие из них не видят разницы между понятием числа и его названием (записью), для большинства из них эти понятия тождественны. На вопрос: «Какие числа называются натуральными?», - обычно следует ошибочный ответ: «1, 2, 3 и т.д. – это натуральные числа». Ответ неправильный, потому что студенты в данной ситуации подменяют само понятие его обозначением: 1, 2, 3 и т.д. – это не натуральные числа, а их обозначения, их символы, их *знаковые модели*. Понятие числа, возникшее как математическая модель операции пересчета предметов, само становится основой для построения новых математических моделей.

Системы счисления и нумерации – это способы знаково-символического моделирования натуральных чисел. Например, любое натуральное число s в десятичной системе счисления можно представить в виде:

$$s = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, \text{ где } a_i < 10, i = 0, 1, 2, \dots, n, a_n \neq 0.$$

Числа a_i называются *однозначными числами*, а их обозначения (символы 1, 2, 3, ..., 9, т.е. знаковые модели) называются *цифрами*. Следовательно, и

запись $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ есть знаковая модель числа s . Другими знаковыми моделями натуральных чисел являются их представления цифрами римской нумерации, старославянской нумерации и др.

Большое разнообразие знаковых моделей представляют в наше распоряжение рациональные числа, которые можно записать в виде:

а) обыкновенной дроби, например, $12/7$, $2/3$;

б) десятичной конечной или десятичной бесконечной периодической дроби, например, $3,5$; $2,(36)$; $12,17(3)$;

в) конечной непрерывной (или цепной дроби), например,

$$[-7; 1,9,5,7] = -7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{5 + \frac{1}{7}}}}$$

$$(702,34105)_8 = 7 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 2 + \frac{3}{8} + \frac{4}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \frac{0}{8^4} + \frac{5}{8^5} \quad \text{г)}$$

систематической

дроби, например,

В зависимости от целей, которые стоят перед исследователем, используется та или иная знаковая модель рационального числа. Так, при проведении теоретических исследований предпочтению отдают непрерывным дробям, при выполнении практических вычислений – десятичным и обыкновенным, и т.д.

Универсальной моделью действительного числа является бесконечная десятичная дробь. При этом, если эта дробь периодическая, то изображаемое ею действительное число является рациональным; если же эта дробь непериодическая, то изображаемое ею действительное число является иррациональным. Другими знаковыми моделями действительных чисел являются *непрерывные* дроби (конечные и бесконечные), иррациональные числа, которые изображаются с помощью знаков корней ($\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{71}$, $\sqrt{1+\sqrt{5}}$ и др.), трансцендентные числа ($p = 3,141592 \dots$, $e = 2,718281 \dots$ и др.).

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД И МОДЕЛИРОВАНИЕ. Особая роль принадлежит моделированию в установлении истинности той или иной формы теоретического знания (аксиоматической теории, гипотезы и т.д.). Модель здесь можно рассматривать как орудие проверки того, действительно ли существуют такие связи, отношения, структуры, закономерности, которые формулируются в данной теории и выполняются в модели, а успешная работа модели – это практическое доказательство истинности теории, т.е. это часть экспериментального доказательства истинности этой теории.

Сформулировав основные понятия (объекты и отношения), а так же аксиомы некоторой теории, мы имеем лишь *логическую схему*, в которой все понятия считаются «пустыми» (не имеющими конкретный смысл). Требование только одно: данные понятия должны формально удовлетворять аксиомам. Остальные свойства этих и новых понятий (т.е. тех, которые будут введены в дальнейшем) должны быть логически выведены из аксиом.

Придав основным объектам и отношениям аксиоматики конкретный смысл, мы получим ее модель. Ценность моделей в этом случае заключается в том, что они дают возможность проверить логическую стройность *аксиоматики*. При этом, как только понятиям аксиоматики придан конкретный смысл, ее аксиомы становятся *теоремами*, которые уже нужно доказывать.

Так, моделями булевой алгебры являются алгебра множеств и алгебра высказываний, моделью числового поля – множество действительных чисел с заданными на нем операциями сложения и умножения. Интересные модели предоставляют в наше распоряжение аксиоматики евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского.

Лекция № 8

СТРУКТУРА СИСТЕМЫ

План:

1. Основные понятие и определения.
2. Свойства системы.
3. Виды связей.

Термин система используется в тех случаях, когда хотят охарактеризовать исследуемый объект как нечто целое, сложное. Существует несколько десятков определений этого понятия. В переводе с греч. «система» - состав, т.е. нечто составленное из частей.

Система — это целое, созданное из частей и элементов, для целенаправленной деятельности.

Из эволюции понятия системы видно, в первых определениях в систему включались только элементы и связи (отношения) между ними (Л.фон Бергаланфи, А. Холл); затем появляется понятие цели как конечного результата, системообразующего критерия (В.И. Вернадский, П.П. Анохин); далее вводят наблюдателя (исследователя), т.е. лицо, представляющее объект или процесс в виде системы (У.Р.Эшби).

Для систем управления необходимо удобно в определении учитывать цели и планы, ресурсы внешние и внутренние, исполнителей, процесс, ограничения и помехи, эффект.

Причем по мере уточнения представлений о системе или при переходе на другую стадию исследования определение системы может уточняться.

Система — это совокупность целостных упорядоченных элементов и подсистем, взаимодействующих между собой для достижения какой-либо цели.

Признаки системы:

- множество элементов и частей,
- единство главной цели для всех элементов и частей,
- наличие связей между ними,
- целостность и единство элементов,
- структура и иерархичность, относительная самостоятельность,
- четко выраженная управляемость.

Свойства системы условно могут разделены на два ряда.

Свойства I ряда— свойства, имеющие непосредственно системное происхождение:

- целостность— система представляет собой организационное сложное целое;
- делимость— система всегда может быть разделена на подсистемы, компоненты.
- множественность— каждая система состоит из множества частей (уровни иерархии, количество элементов и связей);

·целеустремленность— каждая составляющая система должна быть ориентирована на достижение общей цели.

Свойства П ряда— свойства, которые обеспечивают работоспособность системы:

·гомогенность (однородность)— система должна иметь хотя бы одно общее свойство;

·гетерогенность (разнородность)— в каждой системе должно быть многообразие свойств разнородных элементов;

·самоорганизованность— самостоятельно существующая и функционирующая система не должна разрушаться;

·централизованность— в каждой системе должно быть центральное звено, которое будет стоять над всеми уровнями иерархии;

эмерджентность— свойства системы в целом отличаются от свойств отдельных ее элементов.

Строение систем.

Среди понятий, характеризующих строение систем выделяют следующие:

1. элемент системы
2. связь
3. цель.

Элемент— это часть системы, причем простейшая неделимая ее часть, которая обладает некоторой самостоятельностью и имеет свои связи с другими частями.

Рассматривают элементы однородного, разнородного и смешанного характера.

Элементы могут образовывать соединения различных уровней сложности (компоненты). Компоненты, в свою очередь, входят в образования более сложного уровня (подсистемы).

Подсистема — это часть системы, представляющая собой совокупность некоторых элементов и отличающаяся соподчиненностью с точки зрения выполняемых функций.

Связь. Понятие связь входит в любое определение системы и обеспечивает возникновение и сохранение целостных ее свойств. Это понятие одновременно характеризует и строение (статику), и функционирование (динамику) системы.

Связь определяют как ограничение степени свободы элементов. Действительно, элементы, вступая в связь друг с другом, утрачивают часть своих свойств, которыми они потенциально обладали в свободном состоянии.

Связи можно охарактеризовать (рис.1) направлением, силой, характером (или видом). По первому признаку связи делят на направленные и ненаправленные. По второму — на сильные и слабые. По характеру различают связи подчинения, связи порождения, равноправные (связи координации), связи управления.



Рис.1. Классификация видов связей

По предсказуемости связи бывают: функциональные (каждому значению факторного признака соответствует вполне определенное значение результативного признака) и стохастические (каждому значению факторного признака соответствует множество значений результативного признака).

Связи в конкретных системах могут быть одновременно охарактеризованы несколькими из названных признаков.

Очень важную роль в моделировании систем играет понятие обратной связи.

Принцип обратной связи служит для формирования управляющих воздействий по улучшению функционирования системы или элемента.

Цель. Понятие цель и связанные с ним понятия целесообразности, целенаправленности лежат в основе развития системы.

Анализ определений цели и связанных с ней понятий показывает, что в зависимости от стадии познания объекта, этапа системного анализа в понятие цель вкладывают различные оттенки — от идеальных устремлений до конкретных целей-результатов, достижимых в пределах некоторого интервала времени, формулируемых иногда даже в терминах конечного продукта деятельности.

Для того чтобы отразить диалектическое противоречие, заключенное в понятии цель, в Энциклопедическом словаре дается следующее определение: цель - «заранее мыслимый результат сознательной деятельности человека»,

подчеркивается также, что понятие цели связано с человеком, его деятельностью, сознанием.

Цель- определенный результат, к достижению которого стремиться система.

Составляющие при формулировке цели:

1 – глагол (раскрывает целевую активность - увеличить, оптимизировать т.д.)

2 – целевой параметр (показывает на что направлена целевая активность – доля рынка, денежный поток и т.д.)

3 – предмет деятельности (показывает, что является предметом целевой активности – товары, активы и т.д.)

4 – вид деятельности (определяет, за счет какой деятельности будет достигаться целевой параметр – продажи, анализа, управления и т.д.)

5 – место деятельности (пространственные ограничения - регион, область)

6 – период деятельности (продолжительность периода, за который должна быть достигнута цель)

7 – ограничения деятельности (могут учитывать цели вне бизнеса (исследования) или иные обстоятельства, ограничивающие способы достижения.

Обязательными являются составляющие 1-4; составляющие 5-7 включаются в определение по усмотрению в зависимости от вида и сложности исследования.

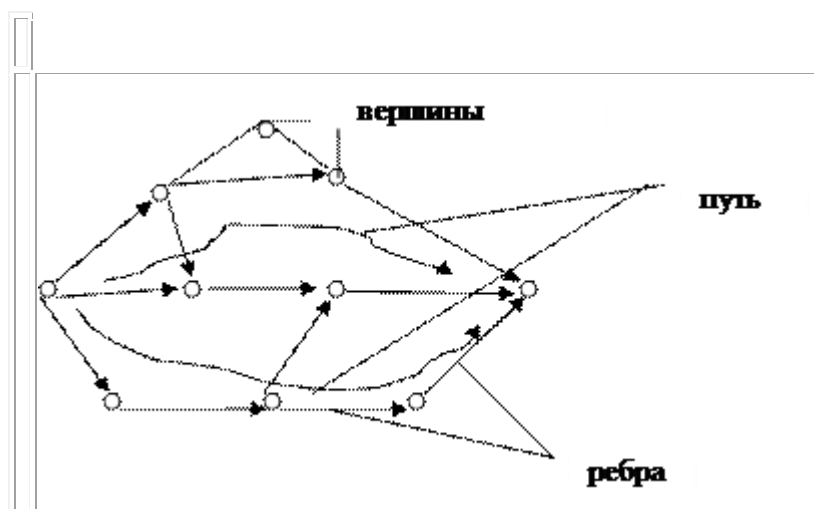
Пример постановки цели: «Повысить конкурентоспособность машиностроительной продукции за счет совершенствования методов управления предприятием в краткосрочной перспективе».

Структура (от латинского «structure», означающего строение, расположение, порядок) отражает определенные взаимосвязи, взаиморасположение составных частей системы, ее устройство (строение).

Обычно понятие структура связывают с графическим отображением. Одна и та же система может быть представлена разными структурами в зависимости от стадии познания объекта или процесса аспекта их рассмотрения, цели создания. При этом в процессе исследования или проектирования структура системы может изменяться.

Различные виды структур имеют специфические особенности и могут рассматриваться как самостоятельные понятия теории систем и системного анализа. Кратко охарактеризуем основные из них.

1. Сетевая структура или сеть представляет собой декомпозицию системы во времени.



Например, сетевая структура может отображать порядок действия технической системы, этапы деятельности человека (при производстве продукции — сетевой график, при проектировании - сетевая модель, при планировании — сетевой план и т. д.).

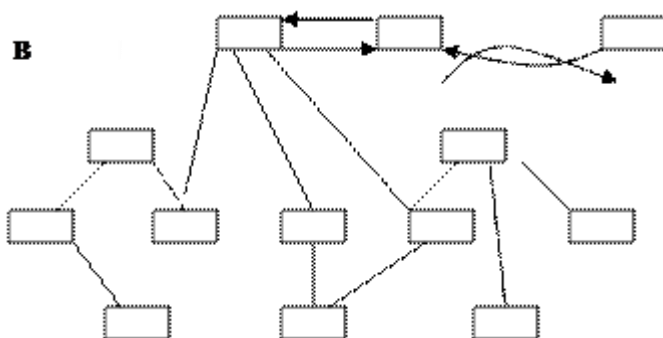
2. Иерархические структуры представляют собой декомпозицию системы в пространстве. Все вершины (узлы) и связи (дуги, ребра) существуют в этих структурах одновременно (не разнесены во времени).

Структуры типа а, в которых каждый элемент нижележащего уровня подчинен одному узлу (одной вершине) вышележащего (это справедливо для всех уровней иерархии), называют иерархическими структурами с «сильными» связями, структурами типа дерева.

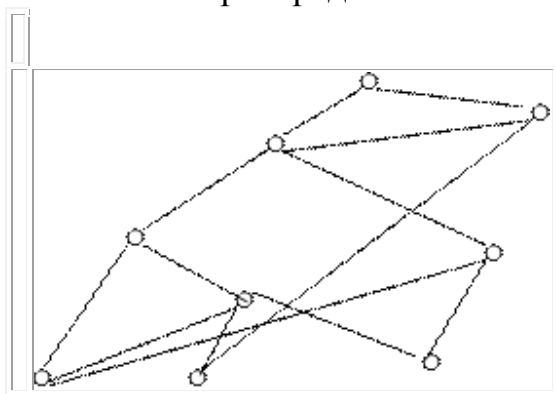
Структура типа б, где элемент нижележащего уровня (один или несколько) может быть подчинен двум и более узлам (вершинам) вышележащего, называют иерархическими структурами со «слабыми» связями. В последнем случае отношения, имеющие вид слабых связей между уровнями, подобны отношениям в матрице, образованной из составляющих этих двух уровней.



3. Смешанные иерархические структуры (типа в) с вертикальными и горизонтальными связями, могут иметь как вертикальные связи разной силы (управление), так и горизонтальные связи взаимодействия (координация).



4. Структуры с произвольными связями – используются на начальном этапе познания системы, когда не известен характер взаимодействий между элементами и распределение элементов по уровням иерархии.



Системы и их классификация

В основу классификации положим следующие признаки (рис. 1): происхождение системы; специфику содержания; объективность существования; степень связи с окружающей средой; зависимость от времени; обусловленность действия; место в иерархии систем.

По происхождению различают системы:

- а) естественные (природные) – системы существующие в естественных процессах (например, Солнечная система, планеты, материки, океаны и т. п.);
- б) искусственные (антропогенные), то есть обязанные своим происхождением труду человека или побочным результатам труда (например, предприятия, машины).

В рамках нашей планеты практически все природные системы оказались подверженными влиянию человека. Так как человечество лишь в очень малой мере познало законы природы, то его деятельность приходит все в большее противоречие с природой. Вследствие этого возникают экологические кризисы, истощаются неэффективно используемые ресурсы, загрязняется окружающая среда, ухудшаются условия существования человека как биологического, родового существа.

Искусственные, то есть антропогенные системы могут быть, в свою очередь, разделены по специфике содержания, например, на системы: технические; технологические; информационные; социальные; экономические или иные.

По характеру поведения системы могут быть:

- управляемые– системы, которым присущ целенаправленный характер поведения;
- неуправляемые - системы, не обладающие целенаправленным поведением

По объективности существования системы могут быть:

- материальными (существующими объективно, то есть независимо от сознания человека);
- идеальными, то есть «сконструированными» в сознании человека в виде гипотез, образов, представлений. В последнем случае они могут выступать в виде систем — формул, уравнений, знаковых схем, музыкальных и зрительных образов и т. п.

Системы различаются по степени связи с окружающей средой и могут быть: открытыми; относительно обособленными; закрытыми; изолированными.

Строго говоря, не существует закрытых или изолированных систем и вместе с тем каждая система является, как минимум, относительно обособленной.

По зависимости от времени различают системы:

- а) статические, параметры которых не зависят от времени;
- б) динамические —их параметры связаны со временем, или, как говорят, являются функцией времени.

По обусловленности действия системы бывают:

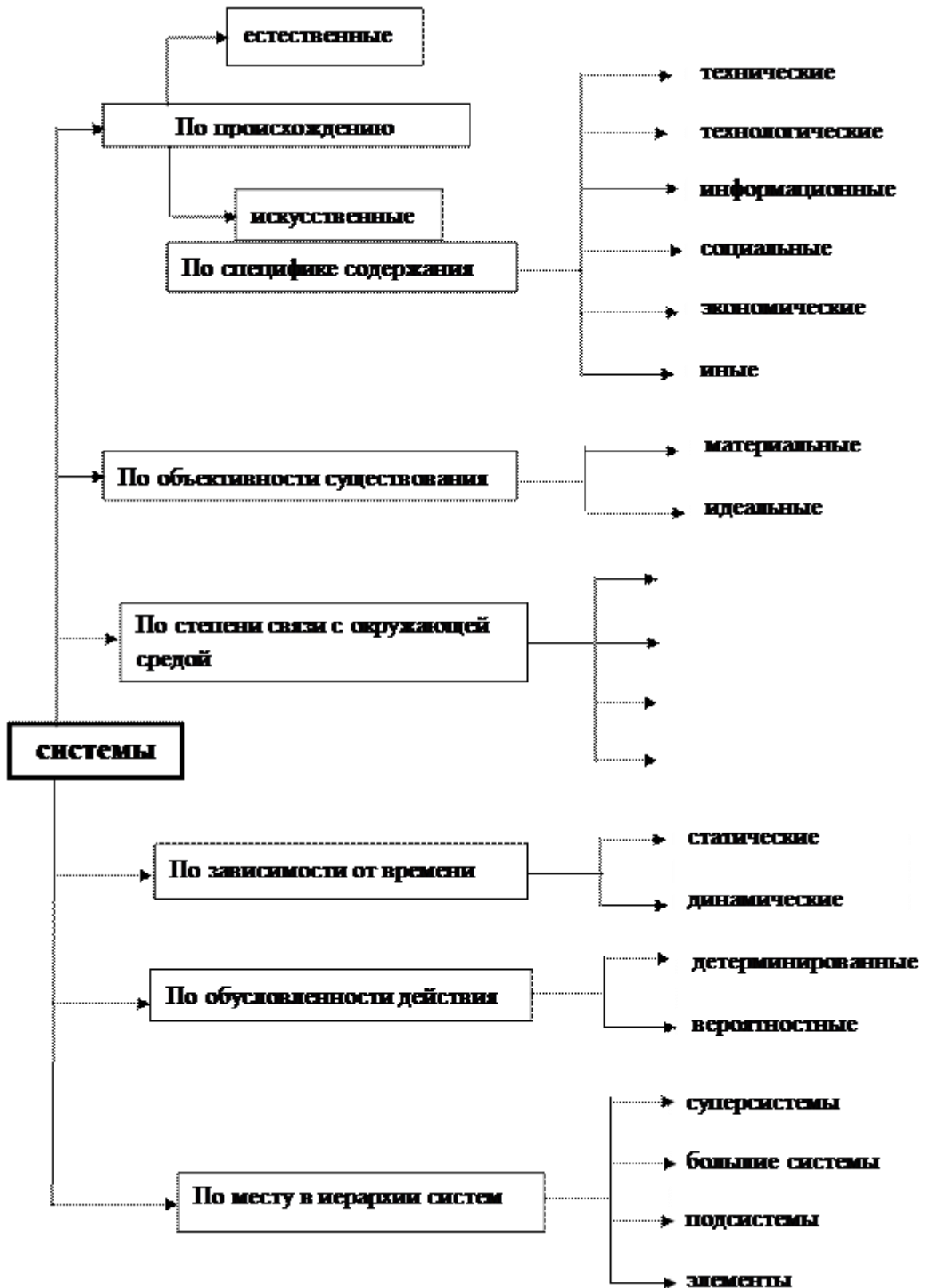
- а) детерминированными – результат можно точно определить
- б) вероятностными– системы, для которых результаты могут быть лишь спрогнозированы. Примерами вероятностных систем являются школьный класс, группа студентов, которые приходят на учебу, — каждый раз число учеников, студентов может быть различным, как и их состав.

Примером классификации систем по сложности может служить классификация, предложенная Боулдингом (табл. 1).

Таблица 1
Классификация систем по Боулдингу

| Тип системы | Уровень сложности | Пример |
|---|-----------------------|----------|
| Неживые системы | Статические структуры | Кристалл |
| Простые динамические структуры с заданным законом поведения | Часовой механизм | |
| Живые системы | Открытые системы с | Клетки |

| | | |
|---|-------------------------------|--|
| | самосохраняемой структурой | |
| Живые организмы с низкой способностью воспринимать информацию | Растения | |
| Живые организмы с более развитой способностью воспринимать информацию, но не обладающие самосознанием | Животные | |
| Системы, характеризующиеся самосознанием, мышлением | Люди | |
| Социальные системы | Социальные организации | |



Понятие элемента системы. По определению элемент— это составная часть сложного целого. В нашем понятии сложное целое – это система, которая представляет собой целостный комплекс взаимосвязанных элементов.

Элемент– часть системы, обладающая самостоятельностью по отношению ко всей системе и неделимая при данном способе выделения частей. неделимость элемента рассматривается как нецелесообразность учета в пределах модели данной системы его внутреннего строения.

Сам элемент характеризуется только его внешними проявлениями в виде связей и взаимосвязей с остальными элементами и внешней средой.

Понятие связи. Связь– совокупность зависимостей свойств одного элемента от свойств других элементов системы. Установить связь между двумя элементами – это значит выявить наличие зависимостей их свойств. Зависимость свойств элементов может иметь односторонний и двусторонний характер.

Взаимосвязи– совокупность двухсторонних зависимостей свойств одного элемента от свойств других элементов системы.

Взаимодействие– совокупность взаимосвязей и взаимоотношений между свойствами элементов, когда они приобретают характер взаимодействия друг другу.

Понятие внешней среды. Система существует среди других материальных или нематериальных объектов, которые не вошли в систему и объединяются понятием «внешняя среда» – объекты внешней среды. Вход характеризует воздействие внешней среды на систему, выход – воздействие системы на внешнюю среду.

По сути дела, очерчивание или выявление системы есть разделение некоторой области материального мира на две части, одна из которых рассматривается как система – объект анализа (синтеза), а другая – как внешняя среда.

Внешняя среда– набор существующих в пространстве и во времени объектов (систем), которые, как предполагается, оказывают действие на систему.

Внешняя среда– это совокупность естественных и искусственных систем, для которых данная система не является функциональной подсистемой.

Типы структур

Рассмотрим ряд типовых структур систем, использующихся при описании организационно-экономических, производственных и технических объектов.

Обычно понятие "структура" связывают с графическим отображением элементов и их связей. Однако структура может быть представлена и в матричной форме, форме теоретико-множественного описания, с помощью языка топологии, алгебры и других средств моделирования систем [11].

Линейная (последовательная) структура (рис. 8) характеризуется тем, что каждая вершина связана с двумя соседними, при выходе из строя хотя бы одного элемента (связи) структура разрушается. Примером такой структуры является конвейер.

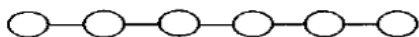


Рис. 8. Линейная структура

Кольцевая структура (рис. 9) отличается замкнутостью, любые два элемента обладают двумя направлениями связи. Это повышает скорость общения, делает структуру более живучей.

Сотовая структура (рис. 10) характеризуется наличием резервных связей, что повышает надежность (живучесть) функционирования структуры, но приводит к повышению ее стоимости.

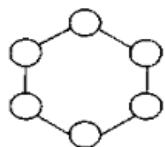


Рис. 9. Кольцевая структура

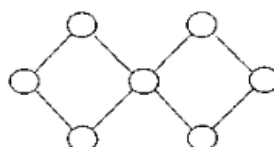


Рис. 10. Сотовая структура

Многосвязная структура (рис. 11) имеет структуру полного графа. Надежность функционирования максимальная, эффективность функционирования высокая за счет наличия кратчайших путей, стоимость — максимальная.

Звездная структура (рис. 12) имеет центральный узел, который выполняет роль центра, все остальные элементы системы являются подчиненными.

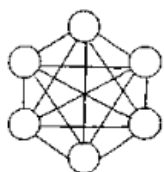


Рис. 11. Многосвязная структура

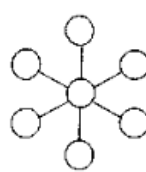


Рис. 12. Звездная структура

Графовая структура (рис. 13) используется обычно при описании производственно-технологических систем.

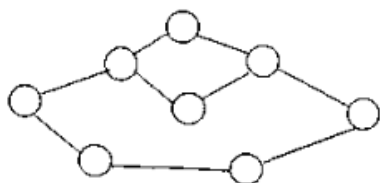


Рис. 13. Графовая структура

Сетевая структура (сеть) — разновидность графовой структуры, представляющая собой декомпозицию системы во времени.

Например, сетевая структура может отображать порядок действия технической системы (телефонная сеть, электрическая сеть и т. п.), этапы деятельности человека (при производстве продукции — сетевой график, при проектировании — сетевая модель, при планировании — сетевая модель, сетевой план и т. д.).

Иерархическая структура получила наиболее широкое распространение при проектировании систем управления, чем выше уровень иерархии, тем

меньшим числом связей обладают его элементы. Все элементы кроме верхнего и нижнего уровней обладают как командными, так и подчиненными функциями управления.

Иерархические структуры представляют собой декомпозицию системы в пространстве. Все вершины (узлы) и связи (дуги, ребра) существуют в этих структурах одновременно (не разнесены во времени).

Иерархические структуры, в которых каждый элемент нижележащего уровня подчинен одному узлу (одной вершине) вышестоящего (и это справедливо для всех уровней иерархии), называют древовидными структурами (структурами типа "дерева"; структурами, на которых выполняются отношения древесного порядка, иерархическими структурами с сильными связями) (рис 14, а).

Структуры, в которых элемент нижележащего уровня может быть подчинен двум и более узлам (вершинам) вышестоящего уровня, называют иерархическими структурами со слабыми связями (рис 14, б).

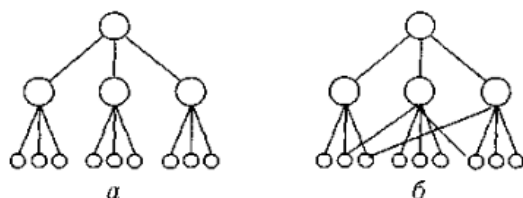


Рис. 14. Иерархические структуры

В виде иерархических структур представляются конструкции сложных технических изделий и комплексов, структуры классификаторов и словарей, структуры целей и функций, производственные структуры, организационные структуры предприятий.

В общем случае термин иерархия шире, он означает соподчиненность, порядок подчинения низших по должности и чину лиц высшим, возник как наименование "служебной лестницы" в религии, широко применяется для характеристики взаимоотношений в аппарате управления государством, армией и т.д., затем концепция иерархии была распространена на любой согласованный по подчиненности порядок объектов.

Таким образом, в иерархических структурах важно лишь выделение уровней соподчиненности, а между уровнями и компонентами в пределах уровня могут быть любые взаимоотношения. В соответствии с этим существуют структуры, использующие иерархический принцип, но имеющие специфические особенности, и их целесообразно выделить особо.

Лекция № 9

КЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ.

План:

1. Классический подход при моделировании систем.
2. Системный подход при моделировании систем.

При моделировании систем используют два подхода: классический (индуктивный), сложившийся исторически первым, и системный, получивший развитие в последнее время.

Исторически первым сложился классический подход к изучению объекта, моделированию системы. Такой (классический) подход может быть использован при создании достаточно простых моделей. Процесс синтеза модели M на основе классического (индуктивного) подхода представлен на рис. 1. Реальный объект, подлежащий моделированию, разбивается на отдельные подсистемы, т. е. выбираются исходные данные D для подходов моделирования и ставятся цели C , отображающие отдельные стороны процесса моделирования. По отдельной совокупности исходных данных D ставится цель моделирования отдельной стороны функционирования системы, на базе этой цели формируется некоторая компонента K будущей модели. Совокупность компонент объединяется в модель M .

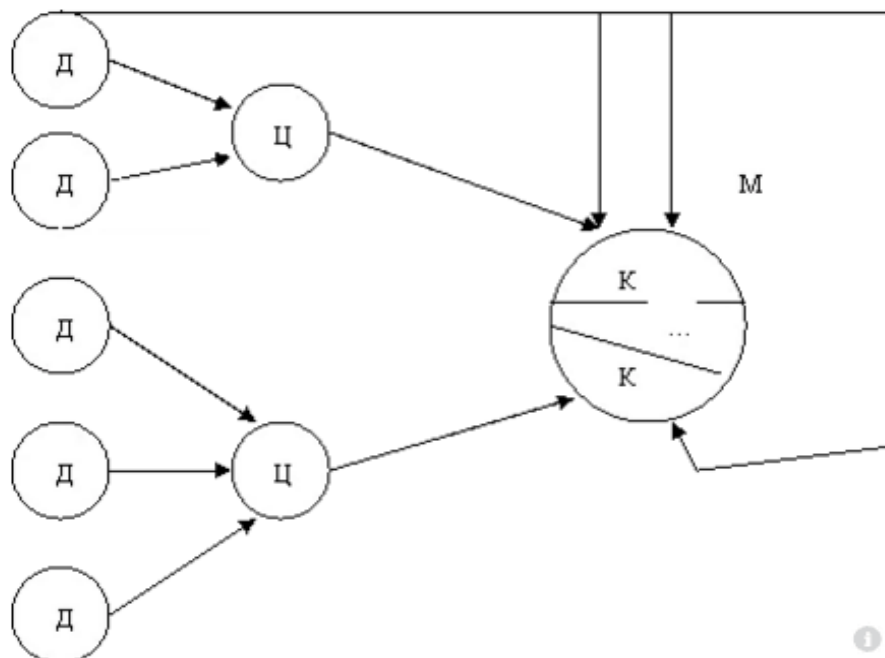


Рис.1 Классический подход к построению объекта, изучению модели

Таким образом, разработка модели M на базе классического подхода означает суммирование отдельных компонент в единую модель, причем каждая из компонент решает свои собственные задачи и изолирована от других частей модели. Поэтому классический подход может быть использован для реализации

сравнительно простых моделей, в которых возможно разделение и взаимно независимое рассмотрение отдельных сторон функционирования реального объекта. Для модели сложного объекта такая разобщенность решаемых задач недопустима, так как приводит к значительным затратам ресурсов при реализации модели на базе конкретных программно-технических средств.

Можно отметить две отличительные стороны классического подхода:

1. наблюдается движение от частного к общему
2. создаваемая модель образуется путем суммирования отдельных ее компонент и не учитывается возникновение нового системного эффекта.

С усложнением объектов моделирования возникла необходимость наблюдения их с более высокого уровня. В этом случае наблюдатель (разработчик) рассматривает данную систему S как некоторую подсистему какой-то метасистемы, т. е. системы более высокого ранга, и вынужден перейти на позиции нового системного подхода, который позволит ему построить не только исследуемую систему, решающую совокупность задач, но и создавать систему, являющуюся составной частью метасистемы.

Системный подход

Системный подход получил применение в системотехнике в связи с необходимостью исследования больших реальных систем, когда сказалась недостаточность, а иногда ошибочность принятия каких-либо частных решений. На возникновение системного подхода повлияли увеличивающееся количество исходных данных при разработке, необходимость учета сложных стохастических связей в системе и воздействий внешней среды E . Все это заставило исследователей изучать сложный объект не изолированно, а во взаимодействии с внешней средой, а также в совокупности с другими системами некоторой метасистемы. Системный подход позволяет решить проблему построения сложной системы с учетом всех факторов и возможностей, пропорциональных их значимости, на всех этапах исследования системы S и построения модели M . Системный подход означает, что каждая система S является интегрированным целым даже тогда, когда она состоит из отдельных разобщенных подсистем. Таким образом, в основе системного подхода лежит рассмотрение системы как интегрированного целого, причем это рассмотрение при разработке начинается с главного — формулировки цели функционирования. Процесс синтеза модели M на базе системного подхода условно представлен на рис. 2. На основе исходных данных D , которые известны из анализа внешней системы, тех ограничений, которые накладываются на систему сверху либо, исходя из возможностей ее реализации, и на основе цели функционирования формулируются исходные требования T к модели системы S . На базе этих требований формируются ориентировочно некоторые подсистемы Π , элементы \mathcal{E} и осуществляется наиболее сложный этап синтеза — выбор V составляющих системы, для чего используются специальные критерии выбора (КВ).

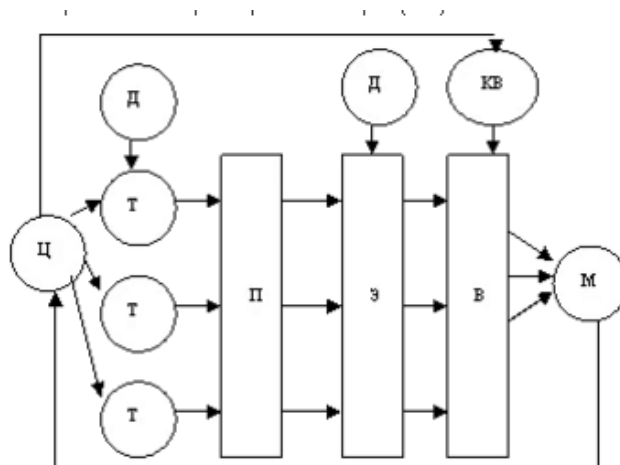


Рис.2 Процесс синтеза модели па основе системного подхода

При моделировании необходимо обеспечить максимальную эффективность модели системы. Эффективность обычно определяется как некоторая разность между какими-то показателями ценности результатов, полученных в итоге эксплуатации модели, и теми затратами, которые были вложены в ее разработку и создание.

Системный подход – методологическая концепция, основанная на стремлении построить целостную картину изучаемого объекта с учетом важных для решаемой задачи элементов объекта, связей между ними и внешних связей с другими объектами и окружающей средой. С усложнением объектов моделирования возникла необходимость их наблюдения с более высокого уровня. В этом случае разработчик рассматривает данную систему как некоторую подсистему более высокого ранга. Например, если ставится задача проектирования системы мониторинга отдельного объекта, то с позиции системного подхода нельзя забывать, что эта система является составной частью некоторого комплекса. В основе системного подхода лежит рассмотрение системы как интегрированного целого, причем это рассмотрение при разработке начинается с главного – формулировки цели функционирования. На рис. 4. условно представлен процесс синтеза модели системы на основе системного подхода. Важным для системного подхода является определение структуры системы – совокупности связей между элементами системы, отражающих их взаимодействие.

Существуют структурные и функциональные подходы к исследованию структуры системы и ее свойств. При структурном подходе выявляются состав выделенных элементов системы и связи между ними. При функциональном подходе рассматриваются алгоритмы поведения системы (функции – свойства, приводящие к достижению цели).

Лекция № 10

ВОЗМОЖНОСТИ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ.

План:

1. Возможности и эффективность моделирования систем на вычислительных машинах.
2. Последовательность разработки и машинной реализации моделей систем.

Возможности и эффективность моделирования систем на вычислительных машинах..

Обеспечение требуемых показателей качества функционирования больших систем, связанное с необходимостью изучения протекания стохастических процессов в исследуемых и проектируемых системах S , позволяет проводить комплекс теоретических и экспериментальных исследований, взаимно дополняющих друг друга. Эффективность экспериментальных исследований сложных систем оказывается крайне низкой, поскольку проведение натуральных экспериментов с реальной системой либо требует больших материальных затрат и значительного времени, либо вообще практически невозможно (например, на этапе проектирования, когда реальная система отсутствует). Эффективность теоретических исследований с практической точки зрения в полной мере проявляется лишь тогда, когда их результаты с требуемой степенью точности и достоверности могут быть представлены в виде аналитических соотношений или моделирующих алгоритмов, пригодных для получения соответствующих характеристик процесса функционирования исследуемых систем.

Появление современных компьютеров было решающим условием широкого внедрения аналитических методов в исследование сложных систем. Стало казаться, что модели и методы, например, математического программирования, станут практическим инструментом решения задач управления в больших системах. Действительно, были достигнуты значительные успехи в создании новых математических методов решения этих задач, однако математическое программирование так и не стало практическим инструментом исследования процесса функционирования сложных систем, так как модели математического программирования оказались слишком грубыми и несовершенными для их эффективного использования. Необходимость учета стохастических свойств системы, недетерминированности исходной информации, наличия корреляционных связей между большим числом переменных и параметров, характеризующих процессы в системах, приводят к построению сложных математических моделей, которые не могут быть

применены в инженерной практике при исследовании таких систем аналитическим методом. Пригодные для практических расчетов аналитические соотношения удастся получить лишь при упрощающих предположениях, обычно существенно искажающих фактическую картину исследуемого процесса. Поэтому в последнее время все острее чувствуется потребность в разработке методов, которые дали бы возможность уже на этапе проектирования систем исследовать более адекватные модели. Указанные обстоятельства приводят к тому, что при исследовании больших систем все шире применяют методы имитационного моделирования.

Последовательность разработки и машинной реализации моделей систем

С развитием вычислительной техники наиболее эффективным методом исследования больших систем стало машинное моделирование, без которого невозможно решение многих крупных народнохозяйственных проблем. Поэтому одной из актуальных задач подготовки инженеров-системотехников является освоение теории и методов математического моделирования с учетом требований системности, позволяющих не только строить модели изучаемых объектов, анализировать их динамику и возможность управления машинным экспериментом с моделью, но и судить, в известной мере, об адекватности создаваемых моделей исследуемым системам, о границах применимости и правильно организовать моделирование систем на современных средствах вычислительной техники.

Прежде чем рассматривать математические, алгоритмические, программные и прикладные аспекты машинного моделирования, необходимо изучить общие методологические аспекты для широкого класса математических моделей объектов, реализуемых на средствах вычислительной техники. Моделирование с использованием средств вычислительной техники (ПЭВМ и т.д.) позволяет исследовать механизм явлений, протекающих в реальном объекте с большими или малыми скоростями, когда в натуральных экспериментах с объектом трудно (или невозможно) проследить за изменениями, происходящими в течение короткого времени, или когда получение достоверных результатов сопряжено с длительным экспериментом. При необходимости машинная модель дает возможность как бы «растягивать» или «сжимать» реальное время, так как машинное моделирование связано с понятием системного времени, отличного от реального. Кроме того, с помощью машинного моделирования в диалоговой системе можно обучать персонал АСУ принятию решений в управлении объектом, например при организации деловой игры, что позволяет выработать необходимые практические навыки реализации процесса управления.

Сущность машинного моделирования системы состоит в проведении на вычислительной машине эксперимента с моделью, которая представляет собой некоторый программный комплекс, описывающий формально и (или) алгоритмически поведение элементов системы S в процессе ее функционирования, т. е. в их взаимодействии друг с другом и внешней средой E . Машинное моделирование с успехом применяют в тех случаях, когда трудно четко сформулировать критерий оценки качества функционирования системы и цель ее не поддается полной формализации, поскольку позволяет сочетать программно-технические возможности ЭВМ со способностями человека мыслить неформальными категориями. В дальнейшем основное внимание будет уделено моделированию систем на персональных и профессиональных ЭВМ как наиболее эффективному инструменту исследования и разработки АСУ различных уровней.

Сформулируем основные требования, предъявляемые к модели M процесса функционирования системы S .

1. Полнота модели должна предоставлять пользователю возможность получения необходимого набора оценок характеристик системы с требуемой точностью и достоверностью.

2. Гибкость модели должна давать возможность воспроизведения различных ситуаций при варьировании структуры, алгоритмов и параметров системы.

3. Длительность разработки и реализации модели большой системы должна быть по возможности минимальной при учете ограничений на имеющиеся ресурсы.

4. Структура модели должна быть блочной, т. е. допускать возможность замены, добавления и исключения некоторых частей без переделки всей модели.

5. Информационное обеспечение должно предоставлять возможность эффективной работы модели с базой данных систем определенного класса.

6. Программные и технические средства должны обеспечивать эффективную (по быстрдействию и памяти) машинную реализацию модели и удобное общение с ней пользователя.

7. Должно быть реализовано проведение целенаправленных (планируемых) машинных экспериментов с моделью системы с использованием аналитико-имитационного подхода при наличии ограниченных вычислительных ресурсов.

С учетом этих требований рассмотрим основные положения, которые справедливы при моделировании на ЭВМ систем S , а также их подсистем и элементов. При машинном моделировании системы S характеристики процесса ее функционирования определяются на основе модели M , построенной исходя из имеющейся исходной информации об объекте моделирования. При получении новой информации об объекте его модель пересматривается и уточняется с учетом новой информации, т. е. процесс моделирования, включая разработку и машинную реализацию модели,

является итерационным. Этот итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена модель M , которую можно считать адекватной в рамках решения поставленной задачи исследования и проектирования системы S .

Моделирование систем с помощью ЭВМ можно использовать в следующих случаях:

а) для исследования системы S до того, как она спроектирована, с целью определения чувствительности характеристики к изменениям структуры, алгоритмов и параметров объекта моделирования и внешней среды;

б) на этапе проектирования системы S для анализа и синтеза различных вариантов системы и выбора среди конкурирующих такого варианта, который удовлетворял бы заданному критерию оценки эффективности системы при принятых ограничениях;

в) после завершения проектирования и внедрения системы, т. е. при ее эксплуатации, для получения информации, дополняющей результаты натурных испытаний (эксплуатации) реальной системы, и для получения прогнозов эволюции (развития) системы во времени.

Существуют общие положения, применяемые ко всем перечисленным случаям машинного моделирования. Даже в тех случаях, когда конкретные способы моделирования отличаются друг от друга и имеются различные модификации моделей, например в области машинной реализации моделирующих алгоритмов с использованием конкретных программно-технических средств, в практике моделирования систем можно сформулировать общие принципы, которые могут быть положены в основу методологии машинного моделирования.

Рассмотрим основные этапы моделирования системы S , к числу которых относятся:

- построение концептуальной модели системы и ее формализация;
- алгоритмизация модели системы и ее машинная реализация;
- получение и интерпретация результатов моделирования системы.

Взаимосвязь перечисленных этапов моделирования систем и их составляющих (подэтапов) может быть представлена в виде сетевого графика, показанного на рис.1.4.

Перечислим эти подэтапы: 1.1 — постановка задачи машинного моделирования системы; 1.2— анализ задачи моделирования системы; 1.3 — определение требований к исходной информации об объекте моделирования и организация ее сбора; 1.4 — выдвижение гипотез и принятие предположений; 1.5 — определение параметров и переменных модели; 1.6 — установление основного содержания модели; 1.7 — обоснование критериев оценки эффективности системы; 1.8 — определение процедур аппроксимации; 1.9 — описание концептуальной модели системы;

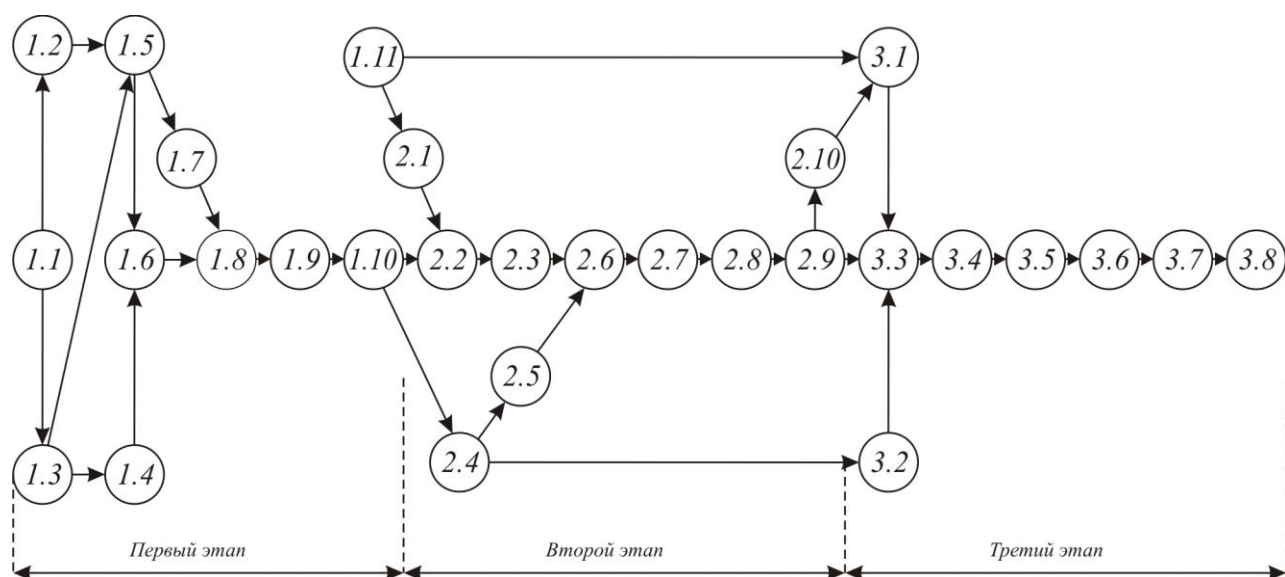


Рис.1.4. Взаимосвязь этапов моделирования систем

1.10 -проверка достоверности концептуальной модели; 1.11- составление технической документации по первому этапу; 2.1-построение логической схемы модели; 2.2 -получение математических соотношений; 2.3 -проверка достоверности модели системы; 2.4 -выбор вычислительных средств для моделирования; 2.5 -составление плана выполнения работ по программированию; 2.6 -построение схемы программы; 2.7 -проверка достоверности схемы программы; 2.8 -проведение программирования модели; 2.9 -проверка достоверности программы; 2.10 -составление технической документации по второму этапу; 3.1 -планирование машинного эксперимента с моделью системы; 3.2 - определение требований к вычислительным средствам; 3.3 -проведение рабочих расчетов; 3.4 -анализ результатов моделирования системы; 3.5 -представление результатов моделирования; 3.6 - интерпретация результатов моделирования; 3.7 подведение итогов моделирования и выдача рекомендаций; 3.8 составление технической документации по третьему этапу.

Таким образом, процесс моделирования системы S сводится к выполнению перечисленных подэтапов, сгруппированных в виде трех этапов. На этапе построения концептуальной модели M_k и ее формализации проводится исследование моделируемого объекта с точки зрения выделения основных составляющих процесса его функционирования, определяются необходимые аппроксимации и получается обобщенная схема модели системы S , которая преобразуется в машинную модель M_m на втором этапе моделирования путем последовательной алгоритмизации и программирования модели. Последний третий этап моделирования системы сводится к проведению, согласно полученному плану, рабочих расчетов на ЭВМ с использованием выбранных программно-технических средств, получению и интерпретации результатов моделирования системы S с учетом воздействия внешней среды

Е. Очевидно, что при построении модели и ее машинной реализации при получении новой информации возможен пересмотр ранее принятых решений, т. е. процесс моделирования является итерационным. Рассмотрим содержание каждого из этапов более подробно.

Лекция № 11

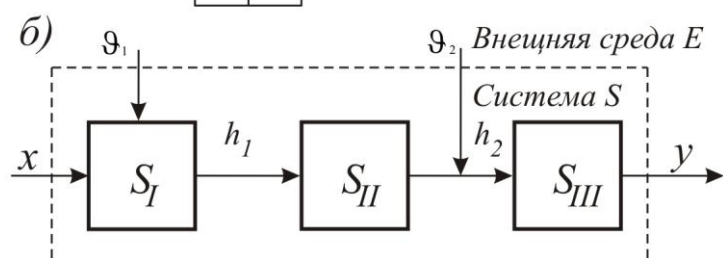
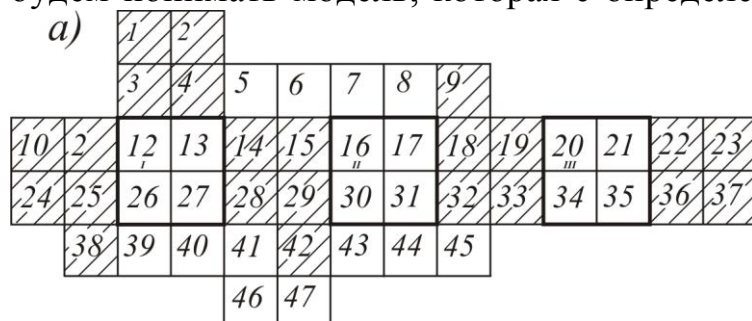
ПОСТРОЕНИЕ КОНЦЕПТУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ И ЕЕ ФОРМАЛИЗАЦИЯ.

План:

1. Построение концептуальной модели системы.
2. Концептуальной модели системы и ее формализация.

На первом этапе машинного моделирования — построения *концептуальной модели* M_k системы S и ее формализации — формулируется модель и строится ее формальная схема, т. е. основным назначением этого этапа является переход от содержательного описания объекта к его математической модели, другими словами, процессу формализации.

Моделирование систем на ЭВМ в настоящее время — наиболее универсальный и эффективный метод оценки характеристик больших систем. Наиболее ответственными и наименее формализованными моментами в этой работе являются проведение границы между системой S и внешней средой E , упрощение описания системы и построение сначала концептуальной, а затем формальной модели системы. Модель должна быть адекватной, иначе невозможно получить положительные результаты моделирования, т. е. исследование процесса функционирования системы на неадекватной модели вообще теряет смысл. Под адекватной моделью будем понимать модель, которая с определенной степенью приближения на



уровне понимания моделируемой системы S разработчиком модели отражает процесс ее функционирования во внешней среде E . Наиболее рационально строить модель функционирования системы по блочному принципу. При этом могут быть выделены три автономные группы блоков такой модели. Блоки первой группы представляют собой имитатор воздействий

внешней среды E на систему S ; блоки второй группы являются собственно моделью процесса функционирования исследуемой системы S ; блоки третьей группы — вспомогательными и служат для машинной реализации блоков двух первых групп, а также для фиксации и обработки результатов моделирования. Рассмотрим механизм перехода от описания процесса функционирования некоторой гипотетической системы к модели этого процесса. Для наглядности введем представление об описании свойств

процесса функционирования системы S , т. е. об ее концептуальной модели M_k как совокупности некоторых элементов, условно изображенных квадратами так, как показано на рис.1.5, а. Эти квадраты представляют собой описание некоторых подпроцессов исследуемого процесса функционирования системы S , воздействия внешней среды E и т. д. Переход от описания системы к ее модели из этой интерпретации сводится к исключению из рассмотрения некоторых второстепенных элементов описания (элементы 5—8, 39—41, 43—47). Предполагается, что они не оказывают существенного влияния на ход процессов, исследуемых с помощью модели. Часть элементов (14, 15, 28, 29, 42) заменяется пассивными связями h_1 , отражающими внутренние свойства системы (рис. 1.5, б). Некоторая часть элементов 1—4, 10, 11, 24, 25 заменяется входными факторами x и воздействиями внешней среды v_1 . Возможны и комбинированные замены: элементы 9, 18, 19, 32, 33 заменены пассивной связью h_2 и воздействием внешней среды E . Элементы 22, 23, 36, 37 отражают воздействие системы на внешнюю среду y .

Оставшиеся элементы системы S группируются в блоки S_I , S_{II} , S_{III} , отражающие процесс функционирования исследуемой системы. Каждый из этих блоков достаточно автономен, что выражается в минимальном количестве связей между ними. Поведение этих блоков должно быть хорошо изучено и для каждого из них построена математическая модель, которая в свою очередь может содержать ряд подблоков. Построенная блочная модель процесса функционирования исследуемой системы S предназначена для анализа характеристики этого процесса, который может быть проведен при машинной реализации полученной модели.

После перехода от описания моделируемой системы S к ее модели M_k , построенной по блочному принципу, необходимо построить математические модели процессов, происходящих в различных блоках. Математическая модель представляет собой совокупность соотношений (например, уравнений, логических условий, операторов), определяющих характеристики процесса функционирования системы S в зависимости от структуры системы, алгоритмов поведения, параметров системы, воздействий внешней среды E , начальных условий и времени. Математическая модель является результатом формализации процесса функционирования исследуемой системы, т. е. построения формального (математического) описания процесса с необходимой в рамках проводимого исследования степенью приближения к действительности.

Для иллюстрации возможностей формализации рассмотрим процесс функционирования некоторой гипотетической системы S , которую можно разбить на m подсистем с характеристиками $y_1(t), y_2(t), \dots, y_h(t)$ с параметрами h_1, h_2, \dots, h_{nH} при наличии входных воздействий x_1, x_2, \dots, x_{nX} и воздействий внешней среды v_1, v_2, \dots, v_{nV} . Тогда математической моделью процесса может служить система соотношений вида

$$y_I(t) = f_I(x_1, x_2, \dots, x_{nX}; v_1, v_2, \dots, v_{nV}; h_1, h_2, \dots, h_{nH}; t);$$

$$y_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_{nX}; v_1, v_2, \dots, v_{nV}; h_1, h_2, \dots, h_{nH}; t);$$

$$y_{nY}(t) = f_m(x_1, x_2, \dots, x_{nX}; v_1, v_2, \dots, v_{nV}; h_1, h_2, \dots, h_{nH}; t).$$

Если бы функции f_1, f_2, \dots, f_m были известны, то соотношения оказались бы идеальной математической моделью процесса функционирования системы S . Однако на практике получение модели достаточно простого вида для больших систем чаще всего невозможно, поэтому обычно процесс функционирования системы S разбивают на ряд элементарных подпроцессов. При этом необходимо так проводить разбиение на подпроцессы, чтобы построение моделей отдельных подпроцессов было элементарно и не вызывало трудностей при формализации. Таким образом, на этой стадии сущность формализации подпроцессов будет состоять в подборе типовых математических схем. Например, для стохастических процессов это могут быть схемы вероятностных автоматов (*P-схемы*), схемы массового обслуживания (*Q-схемы*) и т. д., которые достаточно точно описывают основные особенности реальных явлений, составляющих подпроцессы, с точки зрения решаемых прикладных задач.

Таким образом, формализации процесса функционирования любой системы S должно предшествовать изучение составляющих его явлений. В результате появляется содержательное описание процесса, которое представляет собой первую попытку четко изложить закономерности, характерные для исследуемого процесса, и постановку прикладной задачи. Содержательное описание является исходным материалом для последующих этапов формализации: построения формализованной схемы процесса функционирования системы и математической модели этого процесса. Для моделирования процесса функционирования системы на ЭВМ необходимо преобразовать математическую модель процесса в соответствующий моделирующий алгоритм и машинную программу.

Рассмотрим более подробно основные подэтапы построения концептуальной модели M_k системы и ее формализации (см. рис.1.4.).

1. Постановка задачи машинного моделирования системы. Дается четкая формулировка задачи исследования конкретной системы S и основное внимание уделяется таким вопросам, как: а) признание существования задачи и необходимости машинного моделирования; б) выбор методики решения задачи с учетом имеющихся ресурсов; в) определение масштаба задачи и возможности разбиения ее на подзадачи.

Необходимо также ответить на вопрос о приоритетности решения различных подзадач, оценить эффективность возможных математических методов и программно-технических средств их решения. Тщательная проработка этих вопросов позволяет сформулировать задачу исследования и приступить к ее реализации. При этом возможен пересмотр начальной постановки задачи в процессе моделирования.

2. Анализ задачи моделирования системы. Проведение анализа задачи способствует преодолению возникающих в дальнейшем трудностей при ее решении методом моделирования. На рассматриваемом втором этапе основная работа сводится именно к проведению анализа, включая: а) выбор критериев оценки эффективности процесса функционирования системы S ; б) определение эндогенных и экзогенных переменных модели M ; в) выбор возможных методов идентификации; г) выполнение предварительного анализа содержания второго этапа алгоритмизации модели системы и ее машинной реализации; д) выполнение предварительного анализа содержания третьего этапа получения и интерпретации результатов моделирования системы.

3. Определение требований к исходной информации об объекте моделирования и организация ее сбора. После постановки задачи Моделирования системы S определяются требования к информации, из которой получают качественные и количественные исходные данные, необходимые для решения этой задачи. Эти данные помогают глубоко разобраться в сущности задачи, методах ее решения. Таким образом, на этом подэтапе проводится: а) выбор необходимой информации о системе S и внешней среде E ; б) подготовка априорных данных; в) анализ имеющихся экспериментальных данных; г) выбор методов и средств предварительной обработки информации о системе.

При этом необходимо помнить, что именно от качества исходной информации об объекте моделирования существенно зависят как адекватность модели, так и достоверность результатов моделирования.

4. Выдвижение гипотез и принятие предположений. Гипотезы при построении модели системы S служат для заполнения «пробелов» в понимании задачи исследователем. Выдвигаются также гипотезы относительно возможных результатов моделирования системы S , справедливость которых проверяется при проведении машинного эксперимента. Предположения предусматривают, что некоторые данные неизвестны или их нельзя получить. Предположения могут выдвигаться относительно известных данных, которые не отвечают требованиям решения поставленной задачи. Предположения дают возможность провести упрощения модели в соответствии с выбранным уровнем моделирования. При выдвижении гипотез и принятии предположений учитываются следующие факторы: а) объем имеющейся информации для решения задач; б) подзадачи, для которых информация недостаточна; в) ограничения на ресурсы времени для решения задачи; г) ожидаемые результаты моделирования. Таким образом, в процессе работы с моделью системы S возможно многократное возвращение к этому подэтапу в зависимости от полученных результатов моделирования и новой информации об объекте.

5. Определение параметров и переменных модели. Прежде чем перейти к описанию математической модели, необходимо определить параметры системы h_k , $k=1, n_H$, входные и выходные переменные x_i , $i=1, n_x$, $y_i=1, n_Y$,

воздействия внешней среды, $\nu_l=1$, *пу*. Конечной целью этого подэтапа является подготовка к построению математической модели системы S , функционирующей во внешней среде E , для чего необходимо рассмотрение всех параметров и переменных модели и оценка степени их влияния на процесс функционирования системы в целом. Описание каждого параметра и переменной должно даваться в следующей форме: а) определение и краткая характеристика; б) символ обозначения и единица измерения; в) диапазон изменения; г) место применения в модели.

6. Установление основного содержания модели. На этом подэтапе определяется основное содержание модели и выбирается метод построения модели системы, которые разрабатываются на основе принятых гипотез и предположений. При этом учитываются следующие особенности: а) формулировка задачи моделирования системы; б) структура системы S и алгоритмы ее поведения, воздействия внешней среды E ; в) возможные методы и средства решения задачи моделирования.

7. Обоснование критериев оценки эффективности системы. Для оценки качества процесса функционирования моделируемой системы S необходимо выбрать некоторую совокупность критериев оценки эффективности, т. е. в математической постановке задача сводится к получению соотношения для оценки эффективности как функции параметров и переменных системы. Эта функция представляет собой поверхность отклика в исследуемой области изменения параметров и переменных и позволяет определить реакцию системы. Эффективность системы S можно оценить с помощью интегральных или частных критериев, выбор которых зависит от рассматриваемой задачи.

8. Определение процедур аппроксимации. Для аппроксимации реальных процессов, протекающих в системе S , обычно используются три вида процедур:

а) детерминированную; б) вероятностную; в) определение средних значений.

При детерминированной процедуре результаты моделирования однозначно определяются по данной совокупности входных воздействий, параметров и переменных системы S . В этом случае отсутствуют случайные элементы, влияющие на результаты моделирования. Вероятностная процедура применяется в том случае, когда случайные элементы, включая воздействия внешней среды E , влияют на характеристики процесса функционирования системы S и когда необходимо получить информацию о законах распределения выходных переменных. Процедура определения средних значений используется тогда, когда при моделировании системы интерес представляют средние значения выходных переменных при наличии случайных элементов.

9. Описание концептуальной модели системы. На этом подэтапе построения модели системы: а) описывается концептуальная модель M_k в абстрактных терминах и понятиях; б) дается описание модели с использованием типовых математических схем; в) принимаются

окончательно гипотезы и предположения; г) обосновывается выбор процедуры аппроксимации реальных процессов при построении модели. Таким образом, на этом подэтапе проводится подробный анализ задачи, рассматриваются возможные методы ее решения и дается детальное описание концептуальной модели M_k , которая затем используется на втором этапе моделирования.

10. Проверка достоверности концептуальной модели. После того как концептуальная модель M_k описана, необходимо проверить достоверность некоторых концепций модели перед тем, как перейти к следующему этапу моделирования системы S . Проверять достоверность концептуальной модели достаточно сложно, так как процесс ее построения является эвристическим и такая модель описывается в абстрактных терминах и понятиях. Один из методов проверки модели M_k —применение операций обратного перехода, позволяющий проанализировать модель, вернуться к принятым аппроксимациям и, наконец, рассмотреть снова реальные процессы, протекающие в моделируемой системе S . Проверка достоверности концептуальной модели M_k должна включать: а) проверку замысла модели; б) оценку достоверности исходной информации; в) рассмотрение постановки задачи моделирования; г) анализ принятых аппроксимаций; д) исследование гипотез и предположений. Только после тщательной проверки концептуальной модели M_k следует переходить к этапу машинной реализации модели, так как ошибки в модели M_k не позволяют получить достоверные результаты моделирования.

11. Составление технической документации по первому этапу. В конце этапа построения концептуальной модели M_k и ее формализации составляется технический отчет по этапу, который включает в себя: а) подробную постановку задачи моделирования системы S ; б) анализ задачи моделирования системы; в) критерии оценки эффективности системы; г) параметры и переменные модели системы; д) гипотезы и предположения, принятые при построении модели; е) описание модели в абстрактных терминах и понятиях; ж) описание ожидаемых результатов моделирования системы S .

Составление технической документации — обязательное условие успешного проведения моделирования системы S , так как в процессе разработки модели большой системы и ее машинной реализации принимают участие на различных этапах коллективы специалистов разных профилей (начиная от постановщиков задач и кончая программистами) и документация является средством обеспечения их эффективного взаимодействия при решении поставленной задачи методом моделирования.

Лекция № 12

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ И ИХ МАШИННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ.

План:

1. Алгоритмизация модели.
2. Машинная реализация модели.

На втором этапе моделирования—этапе алгоритмизации модели и ее машинной реализации — математическая модель, сформированная на первом этапе, воплощается в конкретную машинную модель. Этот этап представляет собой этап практической деятельности, направленной на реализацию идей и математических схем в виде машинной модели M_m процесса функционирования системы S .

Прежде чем рассматривать подэтапы алгоритмизации и машинной реализации модели, остановимся на основных принципах построения моделирующих алгоритмов и формах их представления.

Процесс функционирования системы S можно рассматривать как последовательную смену ее состояний $\bar{z} = z(z_1(t), z_2(t), \dots, z_R(t))$ в R -мерном пространстве. Очевидно, что задачей моделирования процесса функционирования исследуемой системы S является построение функций z , на основе которых можно провести вычисление интересующих характеристик процесса функционирования системы.

Для этого должны иметься соотношения, связывающие функции z с переменными, параметрами и временем, а также начальные условия $\bar{z}^0 = z(z_1(t^0), z_2(t^0), \dots, z_R(t^0))$ в момент времени $t = t_0$

Рассмотрим процесс функционирования некоторой детерминированной системы S_D , в которой отсутствуют случайные факторы, т. е. вектор состояний такой системы можно определить как $\bar{z}^0 = \Phi(\bar{z}^0, \bar{x}, t)$. Тогда состояние процесса в момент времени $t_0 + j\Delta t$ может быть однозначно определено из соотношений математической модели по известным начальным условиям. Это позволяет строить моделирующий алгоритм процесса функционирования системы. Для этого преобразуем соотношения модели Z к такому виду, чтобы сделать удобным вычисление $z_1(t + \Delta t), z_2(t + \Delta t), \dots, z_R(t + \Delta t)$ по значениям $z_i(\tau)$, $i = 1, R$, где $\tau \leq t$. Организуем счетчик системного времени, который в начальный момент показывает время t_0 . Для этого момента $z_i(t_0) = z_i^0$. Прибавим интервал времени Δt , тогда счетчик будет показывать $t_1 = t_0 + \Delta t$. Вычислим значения $z_i(t_0 + \Delta t)$. Затем перейдем к моменту времени $t_2 = t_1 + \Delta t$ и т. д. Если шаг Δt достаточно мал, то таким путем можно получить приближенные значения z .

Рассмотрим процесс функционирования стохастической системы S_R , т. е. системы, на которую оказывают воздействия случайные факторы. Для такой

системы функция состояний процесса z в момент времени $\tau \leq t$ и соотношения модели определяют лишь распределение вероятностей для $z_i(t + \Delta t)$ в момент времени $t + \Delta t$. В общем случае и начальные условия z^0 могут быть случайными, задаваемыми соответствующим распределением вероятностей. При этом структура моделирующего алгоритма для стохастических систем в основном остается прежней. Только вместо состояния $z_i(t + \Delta t)$ теперь необходимо вычислить распределение вероятностей для возможных состояний. Пусть счетчик системного времени показывает время t_0 . В соответствии с заданным распределением вероятностей выбирается z_i^0 . Далее, исходя из распределения, получается состояние $z_i(t_0 + \Delta t)$ и т. д., пока не будет построена одна из возможных реализаций случайного многомерного процесса $z_i(t)$ в заданном интервале времени.

Рассмотренный принцип построения моделирующих алгоритмов называется «*принципом Δt* ». Это наиболее универсальный принцип, позволяющий определить последовательные состояния процесса функционирования системы S через заданные интервалы времени Δt . Но с точки зрения затрат машинного времени он иногда оказывается неэкономичным.

При рассмотрении процессов функционирования некоторых систем можно обнаружить, что для них характерны два типа состояний:

1) особые, присущие процессу функционирования системы только в некоторые моменты времени (моменты поступления входных или управляющих воздействий, возмущений внешней среды и т. п.);

2) неособые, в которых процесс находится все остальное время. Особые состояния характерны еще и тем обстоятельством, что функции состояний $z_i(t)$ в эти моменты времени изменяются скачком, а между особыми состояниями изменение координат $z_i(t)$ происходит плавно и непрерывно или не происходит совсем. Таким образом, следя при моделировании системы S только за ее особыми состояниями в те моменты времени, когда эти состояния имеют место, можно получить информацию, необходимую для построения функций $z_i(t)$. Очевидно, для описанного типа систем могут быть построены моделирующие алгоритмы по «*принципу особых состояний*». Обозначим скачкообразное (релейное) изменение состояния z как δz , а «*принцип особых состояний*» — как «*принцип δz* ».

Например, для системы массового обслуживания (*Q-схемы*) в качестве особых состояний могут быть выбраны состояния в моменты поступления заявок на обслуживание в прибор Π и в моменты окончания обслуживания заявок каналами K , когда состояние системы, оцениваемое числом находящихся в ней заявок, меняется скачком.

Отметим, что характеристики процесса функционирования таких систем с особыми состояниями оцениваются по информации об особых состояниях, а неособые состояния при моделировании не рассматриваются. «*Принцип δz* » дает возможность для ряда систем существенно уменьшить затраты

машинного времени на реализацию моделирующих алгоритмов по сравнению с «принципом Δt ». Логика построения моделирующего алгоритма, реализующего «*принцип δz* », отличается от рассмотренной для «принципа Δt » только тем, что включает в себя процедуру определения момента времени t_δ соответствующего следующему особому состоянию системы S . Для исследования процесса функционирования больших систем рационально использование комбинированного принципа построения моделирующих алгоритмов, сочетающего в себе преимущества каждого из рассмотренных принципов.

Удобной формой представления логической структуры моделей процессов функционирования систем и машинных программ является схема. На различных этапах моделирования составляются обобщенные и детальные логические схемы моделирующих алгоритмов, а также схемы программ.

Обобщенная (укрупненная) схема моделирующего алгоритма задает общий порядок действий при моделировании системы без каких-либо уточняющих деталей. Обобщенная схема показывает, что необходимо выполнить на очередном шаге моделирования, например обратиться к датчику случайных чисел.

Детальная схема моделирующего алгоритма содержит уточнения, отсутствующие в обобщенной схеме. Детальная схема показывает не только, что следует выполнить на очередном шаге моделирования системы, но и как это выполнить.

Логическая схема моделирующего алгоритма представляет собой логическую структуру модели процесса функционирования системы S . Логическая схема указывает упорядоченную во времени последовательность логических операций, связанных с решением задачи моделирования.

Схема программы отображает порядок программной реализации моделирующего алгоритма с использованием конкретного математического обеспечения. Схема программы представляет собой интерпретацию логической схемы моделирующего алгоритма разработчиком программы на базе конкретного алгоритмического языка. Различие между этими схемами заключается в том, что логическая схема отражает логическую структуру модели процесса функционирования системы, а схема программы – логику машинной реализации модели с использованием конкретных программно-технических средств моделирования.

Лекция № 13

АНАЛИЗ ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ.

План:

1. Анализ принцип построение математическое моделирование сложных технических и технологических объектов.
2. Разработка и реализация расчетных модулей и моделирующих алгоритмов химико-технологических процессов.

Так как структура химико-технологического или физико-химического оператора досконально не известна, то вместо него пользуются функциональным оператором Φ (1.2), являющимся приближением истинного оператора Q (1.1).

Превращение входных переменных \bar{X} в оценки выходных переменных y может быть отображено с использованием функционального оператора Φ :

$$\hat{y} = \Phi(\bar{X}, \bar{a}), \quad (1.2)$$

где Φ — функциональный оператор, который отображает пространство входных переменных \bar{X} в пространство оценок выходных переменных \hat{y} ; \bar{a} — коэффициенты уравнений, описывающих физико-химические процессы.

Соотношение (1.2) представляет собой систему уравнений математического описания (МО) химико-технологического процесса (ХТП) с начальными и граничными условиями. Для синтеза функционального оператора Φ для ХТС необходимо на основе системного анализа ХТС идентифицировать функциональные операторы всех ФХС, составляющих её (находящихся на более низких уровнях иерархии).

Математическое описание процессов в отдельных аппаратах химического производства может быть теоретическим или эмпирическим, в соответствии с чем получают теоретические или эмпирические модели (рис. 1.4).

Математическое описание фундаментальных комбинированных моделей ХТП — это сложные интегро-дифференциальные уравнения, детально описывающие процессы, в том числе и на атомно-молекулярном уровне.

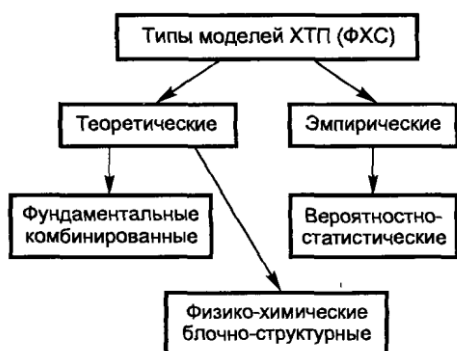


Рис. 1.4. Типы моделей ХТП (ФХС)

Математическое описание физико-химических блочно-структурных моделей ХТП — это модельное описание «элементарных» процессов, в основе которого лежат балансовые уравнения, записываемые с учётом гидродинамических закономерностей движения потоков фаз и включающие интенсивности источников массы, теплоты и импульса соответственно в уравнениях балансов массы, теплоты и импульса.

Математическое описание эмпирических вероятностно-статистических моделей ХТП может быть получено в виде полиномиального представления зависимости выходных переменных $\bar{y}^{\text{расч}}$ от входных \bar{X} в явном виде при обработке данных.

Математическое описание (МО) теоретических моделей строится на основе знания механизмов протекания процессов химической технологии:

для фундаментальных комбинированных моделей — это детальное описание механизмов процессов;

для физико-химических блочно-структурных моделей — приближённое описание процессов, базирующиеся на модельном представлении гидродинамических, массо и теплообменных процессов, а также процессов химических превращений, называемых в этом случае «элементарными» процессами.

Как правило, для моделирования химических производств используется физико-химические блочно-структурные модели, которые по функциональным возможностям вполне удовлетворяют точности, необходимой для расчётов технологических схем реальных производств. Основные описываемые в этом случае «элементарные» процессы представлены на рис. 1.5.

Для совокупности этих «элементарных» процессов получают три основных типа уравнений математического описания.

1. Системы конечных уравнений (СКУ): системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) или системы нелинейных уравнений (СНУ).

2. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ).

3. Системы дифференциальных уравнений в частных производных (СДУЧП)

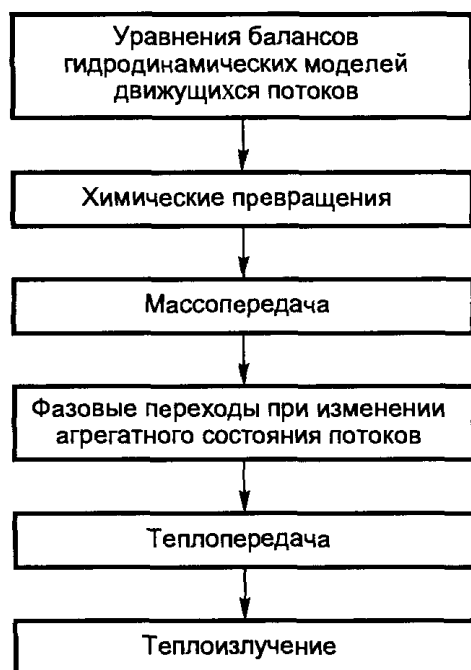


Рис.1.5. Основные «элементарные» процессы при построении физико-химических блочно-структурных моделей ХТП

Для получения зависимости выходных переменных $\bar{y}^{\text{расч}}$ от входных \bar{X} системы уравнений МО (1.2), используемые для физико-химических моделей, должны быть решены относительно выходных переменных. В этом случае решается так называемая прямая задача математического моделирования, когда известен вид уравнений МО (оператор Φ) и значения его коэффициентов a (1.2). Из-за того, что эти модели основываются на знании физико-химических механизмов протекающих процессов, они могут использоваться для экстраполяции свойств реальных объектов за пределы диапазонов изменения переменных, в которых проводилась их экспериментальная проверка и определение коэффициентов моделей a .

Для эмпирических моделей не требуется решение уравнений математического описания процесса. Для этих моделей зависимости $\bar{y}^{\text{расч}}$ (число этих зависимостей равно размеру вектора $\bar{y}^{\text{расч}}$) от \bar{X} и a получаются в явном виде путём непосредственного решения задачи аппроксимации экспериментальных данных, т.е. при решении так называемой обратной задачи математического моделирования, когда по опытным данным определяется и вид уравнений математического описания (МО) (структурная идентификация), и значения их коэффициентов a (параметрическая идентификация). Эти модели, как правило, лишены физического смысла и справедливы только в том диапазоне изменения параметров реального процесса, где был поставлен эксперимент. За пределами этого диапазона экстраполяция поведения процессов с использованием эмпирических моделей не желательна.

Разработка и реализация расчетных модулей и моделирующих алгоритмов химико-технологических процессов

Для физико-химических блочно-структурных моделей алгоритм решения системы уравнений МО (1.2) отображается с использованием вектор-функции следующим образом:

$$\bar{y}^{\text{расч}} = \bar{\varphi}(\bar{X}, \bar{a}) \quad (1.3)$$

где $\bar{\varphi}$ — вектор-функция, которая отражает последовательность аналитического или численного (приближённого) решения системы уравнений (1.2), определяемой функциональным оператором Φ .

Отображение (1.3) помимо того, что задаёт количественные соотношения между входными и выходными переменными процесса, несёт в себе ещё очень важную информацию о способе получения решения, т.е. об алгоритме решения задачи.

По существу, вектор-функцию $\bar{\varphi}$ можно рассматривать как формальное представление алгоритма решения системы уравнений МО химико-технологического процесса (1.2). Этот алгоритм, называемый моделирующим алгоритмом (МА) или алгоритм математического моделирования (alg MM) и представляет собой комбинацию известных алгоритмов (в простейшем случае — один алгоритм) вычислительной математики, функции (1.2) для которых записаны с учётом физико-химических механизмов протекающих реальных процессов.

В дальнейшем будет показано, что для разработки оптимального МА (1.3) целесообразно провести анализ системы уравнений МО (1.2) с использованием её информационной матрицы, а сам алгоритм представлять в виде блок-схемы алгоритма расчёта ХТП.

Реализацией на компьютере МА завершается этап построения математической модели — первый этап компьютерного моделирования ХТП.

Основные этапы построения физико-химической блочно-структурной математической модели ХТП изображены на рис. 1.6 и включают в себя следующие последовательные стадии

1. Построение системы уравнений математического описания ХТП (МО).
2. Разработка моделирующего алгоритма (МА).

Реализация моделирующего алгоритма решения системы уравнений математического описания ХТП на компьютере, в результате чего получается математическая модель (ММ) процесса или её расчётный модуль (расчётный модуль ФХС/ХТС).

В результате можно привести два определения математической физико-химической блочно-структурной модели ХТП [21, 46]:

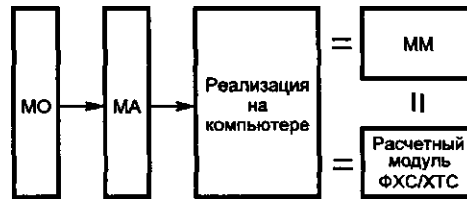


Рис. 16. Этапы построения математической модели ХТП

1. математическая модель — это реализованный на компьютере алгоритм решения системы уравнений математического описания;

2. математическая модель — это система уравнений, которая связывает между собой входные и выходные переменные реального процесса (МО), для прогнозирования свойств которого необходимо с помощью специального алгоритма решить эту систему уравнений, а сам алгоритм должен быть реализован на компьютере.

Следует упомянуть о важной разновидности компьютерных моделей, так называемых имитационных моделях. Имитационное моделирование, как правило, связано с моделированием динамических процессов, т.е. нестационарных режимов работы реальных объектов. Изменение ситуаций во времени — тот феномен, который изучается с использованием имитационных моделей. В результате могут быть получены новые знания и выработаны разного рода решения для управления реальным динамическим процессом. Разработка таких моделей обычно сложнее разработки математических моделей, описывающих стационарные режимы работы объектов. Это связано с тем, что уравнения МО нестационарных режимов объектов включают в себя обыкновенные и частные производные функций переменных процессов по времени, а соответствующие алгоритмы их решения — МА — требуют реализации эффективных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Лекция № 14

ПОЛУЧЕНИЕ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ.

План:

1. Анализ принцип построение математическое моделирование сложных технических и технологических объектов.
2. Разработка и реализация расчетных модулей и моделирующих алгоритмов химико-технологических процессов.

Получение и интерпретация результатов моделирования

На третьем этапе моделирования — этапе получения и интерпретации результатов моделирования — ЭВМ используется для проведения рабочих расчетов по составленной и отлаженной программе. Результаты этих расчетов позволяют проанализировать и сформулировать выводы о характеристиках процесса функционирования моделируемой системы S .

При реализации моделирующих алгоритмов на ЭВМ вырабатывается информация о состояниях процесса функционирования исследуемых систем $z(t) \in Z$. Эта информация является исходным материалом для определения приближенных оценок искомых характеристик, получаемых в результате машинного эксперимента, т. е. критериев оценки. *Критерием оценки* будем называть любой количественный показатель, по которому можно судить о результатах моделирования системы. Критериями оценки могут служить показатели, получаемые на основе процессов, действительно протекающих в системе, или получаемых на основе специально сформированных функций этих процессов.

В ходе машинного эксперимента изучается поведение исследуемой модели M процесса функционирования системы S на заданном интервале времени $[0, T]$. Поэтому критерий оценки является в общем случае векторной случайной функцией, заданной на этом же интервале:

$$\vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)).$$

Часто используют более простые критерии оценки, например-вероятность определенного состояния системы в заданный момент времени $t^* \in [0, T]$, отсутствие отказов и сбоев в системе на интервале $[0, T]$ и т. д. При интерпретации результатов моделирования вычисляются различные статистические характеристики закона распределения критерия оценки.

Рассмотрим общую схему фиксации и обработки результатов моделирования системы, которая приведена на рис. 1.6. Будем рассматривать гипотетическую модель M , предназначенную для исследования поведения системы S на интервале времени $[0, T]$. В общем случае критерием

интерпретации результатов моделирования является нестационарный случайный n -мерный процесс $\vec{q}(t)$, $0 \leq t \leq T$. Полагаем для определенности, что состояние моделируемой системы S проверяется каждые Δt временных единиц, т. е. используется «принцип Δt ». При этом вычисляются значения, $\vec{q}(j\Delta t)$, $j=0, R$ критерия $\vec{q}(t)$. Таким образом, о свойствах случайного процесса $\vec{q}(t)$ судят по свойствам случайной последовательности $\vec{q}(j\Delta t)$, $j=0, R$ или, иначе говоря, по свойствам m -мерного вектора вида

$$\vec{q} = (\vec{q}(0), \vec{q}(\Delta t), \dots, \vec{q}[(R-1)\Delta t], \vec{q}(T)), m = n(R+1), T = R\Delta t.$$

Процесс функционирования системы S на интервале $[0, T]$ моделируется N -кратно с получением независимых реализаций \vec{q}_i , $i = \bar{1}, \bar{N}$ вектора \vec{q} . Работа модели на интервале $[0, T]$ называется *прогоном модели*. На схеме, изображенной на рис. 1.6, обозначено: $I \equiv i$; $J \equiv j$; $K \equiv R$; $N \equiv N$; $T \equiv t$; $DT \equiv \Delta t$; $Q \equiv q$.

В общем случае алгоритмы фиксации и статистической обработки данных моделирования содержат три цикла. Полагаем, что имеется машинная модель M_M системы S .

Внутренний цикл (блоки 5-8) позволяет получить последовательность $\vec{q}_i(t) = \vec{q}_i(j\Delta t)$, $j=0, R$ в моменты времени $t = 0, 2\Delta t, \dots, R\Delta t = T$. Основной блок 7 реализует процедуру вычисления последовательности $\vec{q}(\Delta t)$: $ВЫЧ[QI(T)]$. Именно в этом блоке имитируется процесс функционирования моделируемой системы S на интервале времени $[0, T]$.

Промежуточный цикл (блоки 3-10), в котором организуется N -кратное повторение прогона модели, позволяющее после соответствующей статистической обработки результатов судить об оценках характеристик моделируемого варианта системы. Окончание моделирования варианта системы S может определяться не только заданным числом реализаций (блок 10), как это показано на схеме, но и заданной точностью результатов моделирования. В этом цикле содержится блок 9, реализующий процедуру фиксации результатов моделирования по i -му прогону модели $\vec{q}(t)$: $ФРМ[QI(T)]$.

Внешний цикл (блоки 1 - 12) охватывает оба предшествующих цикла и дополнительно включает блоки 1, 2, 11, 12, управляющие последовательностью моделирования вариантов системы S . Здесь организуется поиск оптимальных структур, алгоритмов и параметров системы S , т. е. блок 11 обрабатывает результаты моделирования исследуемого R -го варианта системы $ОРМ [QK]$, блок 12 проверяет удовлетворительность полученных оценок характеристик процесса функционирования системы $\vec{q}_i^{(R)}(t)$ требуемым (ведет поиск оптимального варианта системы $ПОВ [S(K)]$), блок 1 изменяет структуру, алгоритмы и параметры системы S на уровне ввода исходных данных для очередного R -го варианта системы $ВИД [S(K)]$. Блок 13 реализует функцию выдачи результатов моделирования по

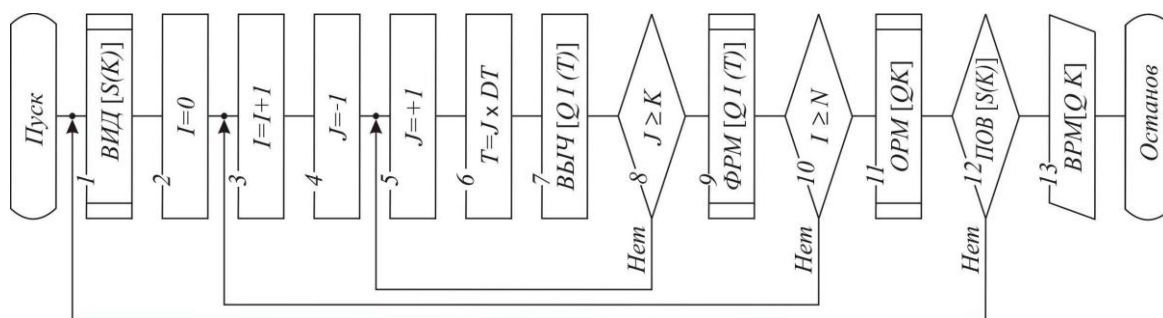


Рис.1.6. Алгоритм фиксации и обработки результатов моделирования системы

каждому k -му варианту модели системы S_R , т. е. $ВРМ[QK]$. Рассмотренная схема позволяет вести статистическую обработку результатов моделирования в наиболее общем случае при нестационарном критерии $\bar{q}(t)$. В частных случаях можно ограничиться более простыми схемами.

Если свойства моделируемой системы S определяются значением критерия $\bar{q}(t)$ в некоторый заданный момент времени, например в конце периода функционирования модели $t = R\Delta t = T$, то обработка сводится к оценке распределения n -мерного вектора $\bar{q}(T)$ по независимым реализациям $\bar{q}_i(T)$, $i=1, N$, полученным в результате N прогонов модели.

Если в моделируемой системе S по истечению некоторого времени с начала работы $t_0 = R_0\Delta t$ установится стационарный режим, то о нем можно судить по одной, достаточно длинной реализации $\bar{q}_1(t)$ критерия $\bar{q}(t)$, стационарного и эргодического на интервале $[t_0, T]$. Для рассмотренной схемы это означает, что исключается средний цикл ($n=1$) и добавляется оператор, позволяющий начать обработку значений $q_1(j\Delta t)$ при $j \geq R_0$.

Другая особенность применяемых на практике методов статистической обработки результатов моделирования связана с исследованием процесса функционирования систем с помощью моделей блочной конструкции. В этом случае часто приходится применять раздельное моделирование отдельных блоков модели, когда имитация входных воздействий для одного блока проводится на основе оценок критериев, полученных предварительно на другом блоке модели. При раздельном моделировании может иметь место либо непосредственная запись в накопителе реализаций критериев, либо их аппроксимация, полученная на основе статистической обработки результатов моделирования с последующим использованием генераторов случайных чисел для имитации этих воздействий.

Прежде чем приступить к последнему, третьему, этапу моделирования системы, необходимо для его успешного проведения иметь четкий план действий, сводящийся к выполнению следующих основных подэтапов.

Планирование машинного эксперимента с моделью системы. Перед выполнением рабочих расчетов на ЭВМ должен быть составлен план проведения эксперимента с указанием комбинаций переменных и параметров, для которых должно проводиться моделирование системы S . Планирование машинного эксперимента призвано дать в итоге максимальный объем необходимой информации об объекте моделирования при минимальных затратах машинных ресурсов. При этом различают стратегическое и тактическое планирование машинного эксперимента. При стратегическом планировании эксперимента ставится задача построения оптимального плана эксперимента для достижения цели, поставленной перед моделированием (например, оптимизация структуры, алгоритмов и параметров системы S , исследуемой методом моделирования на ЭВМ). Тактическое планирование машинного эксперимента преследует частные цели оптимальной реализации каждого конкретного эксперимента из множества необходимых, заданных при стратегическом планировании (например, решение задачи выбора оптимальных правил остановки при статистическом моделировании системы S на ЭВМ). Для получения наиболее эффективного плана машинного эксперимента необходимо использовать статистические методы.

Определение требований к вычислительным средствам. Необходимо сформулировать требования по времени использования вычислительных средств, т. е. составить график работы на одной или нескольких ЭВМ, а также указать те внешние устройства ЭВМ, которые потребуются при моделировании.

Проведение рабочих расчетов. После составления программы модели и плана проведения машинного эксперимента с моделью системы S можно приступить к рабочим расчетам на ЭВМ, которые обычно включают в себя: а) подготовку наборов исходных данных; б) подготовку исходных данных для ввода в ЭВМ; в) проверку исходных данных, подготовленных для ввода; г) проведение расчетов на ЭВМ; д) получение выходных данных, т. е. результатов моделирования.

Проведение машинного моделирования рационально выполнять в два этапа: контрольные, а затем рабочие расчеты. Причем контрольные расчеты выполняются для проверки машинной модели M_M и определения чувствительности результатов к изменению исходных данных.

Анализ результатов моделирования системы. Чтобы эффективно проанализировать выходные данные, полученные в результате расчетов на ЭВМ, необходимо знать, что делать с результатами рабочих расчетов и как их интерпретировать. Эти задачи могут быть решены на основании предварительного анализа на двух первых этапах моделирования системы S . Планирование машинного эксперимента с моделью M_M позволяет вывести необходимое количество выходных данных и определить метод их анализа. При этом необходимо, чтобы на печать выдавались только те результаты,

которые нужны для дальнейшего анализа. Также необходимо полнее использовать возможности ЭВМ с точки зрения обработки результатов моделирования и представления этих результатов в наиболее наглядном виде. Вычисление статистических характеристик перед выводом результатов из ЭВМ повышает эффективность применения машины и сводит к минимуму обработку выходной информации после ее вывода из ЭВМ.

Представление результатов моделирования. Как уже отмечалось, необходимо на третьем этапе моделирования уделить внимание форме представления окончательных результатов моделирования в виде таблиц, графиков, диаграмм, схем и т. п. Целесообразно в каждом конкретном случае выбрать наиболее подходящую форму, так как это существенно влияет на эффективность их дальнейшего употребления заказчиком. В большинстве случаев наиболее простой формой считаются таблицы, хотя графики более наглядно иллюстрируют результаты моделирования системы S . При диалоговых режимах моделирования наиболее рациональными средствами оперативного отображения результатов моделирования являются дисплеи.

Интерпретация результатов моделирования. Получив и проанализировав результаты моделирования, их нужно интерпретировать по отношению к моделируемому объекту, т. е. системе S . Основное содержание этого подэтапа - переход от информации, полученной в результате машинного эксперимента с моделью $M_{м,к}$ информации применительно к объекту моделирования, на основании которой и будут делаться выводы относительно характеристик процесса функционирования исследуемой системы S .

Подведение итогов моделирования и выдача рекомендаций. Проведение этого подэтапа тесно связано с предыдущим вторым этапом. При подведении итогов моделирования должны быть отмечены главные особенности полученных в соответствии с планом эксперимента над моделью $M_{м}$ результатов, проведена проверка гипотез и предположений и сделаны выводы на основании этих результатов. Все это позволяет сформулировать рекомендации по практическому использованию результатов моделирования, на пример на этапе проектирования системы S .

Составление технической документации по третьему этапу. Эта документация должна включать в себя: а) план проведения машинного эксперимента; б) наборы исходных данных для моделирования; в) результаты моделирования системы; г) анализ и оценку результатов моделирования; д) выводы по полученным результатам моделирования; е) указание путей дальнейшего совершенствования машинной модели и возможных областей ее приложения.

Полный комплект документации по моделированию конкретной системы S на ЭВМ должен содержать техническую документацию по каждому из трех рассмотренных этапов.

Таким образом, процесс моделирования системы S сводится к выполнению перечисленных этапов моделирования. На этапе построения концептуальной модели M_k проводится исследование моделируемого объекта, определяются необходимые аппроксимации и строится обобщенная схема модели, которая преобразуется в машинную модель M_m на втором этапе моделирования путем последовательного построения логической схемы модели и схемы программы. На последнем этапе моделирования проводят рабочие расчеты на ЭВМ, получают и интерпретируют результаты моделирования системы S .

Рассмотренная последовательность этапов и подэтапов отражает наиболее общий подход к построению и реализации модели системы S . В дальнейшем остановимся на наиболее важных составляющих процесса моделирования.

Лекция № 15
ТИПИЧНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ОБЪЕКТОВ.

План:

1. Построение стохастической модели.
2. Разработка и реализация расчетных модулей и моделирующих алгоритмов химико-технологических процессов.

Построение стохастической модели включает разработку, оценку качества и исследование поведения системы с помощью уравнений, описывающих изучаемый процесс.

Для этого путем проведения специального эксперимента с реальной системой добывается исходная информация. При этом используются методы планирования эксперимента, обработки результатов, а также критерии оценки полученных моделей, базирующиеся на таких разделах математической статистики как дисперсионный, корреляционный, регрессионный анализ и др.

В основе методов построения статистической модели, описывающей технологический процесс (рис.6.1) лежит концепция «черного ящика». Для него возможны многократные измерения входных факторов: x_1, x_2, \dots, x_k и выходных параметров: y_1, y_2, \dots, y_p , по результатам которых устанавливают зависимости:

$$y_n = f(x_1, x_2, \dots, x_k); \quad n = 1, 2, \dots, p \quad (6.1)$$

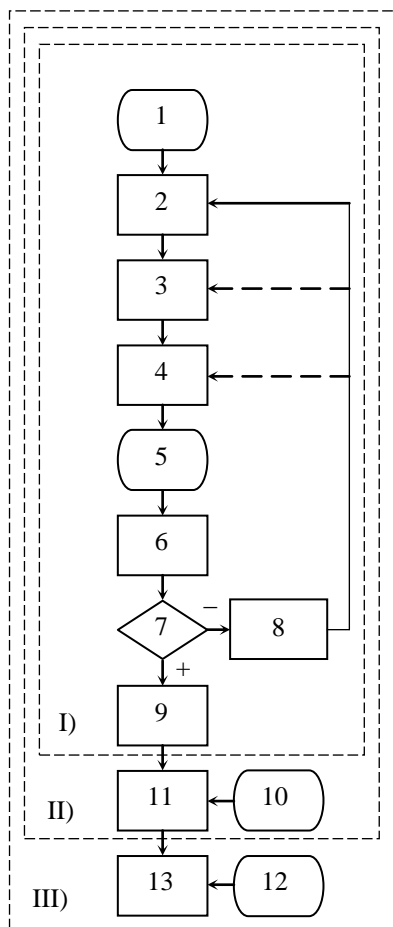


Рис.6.1 Этапы разработки стохастической модели:

1 - постановка задачи; 2 - выбор факторов и параметров; 3 - выбор вида модели; 4 - планирование эксперимента; 5 - реализация экспериментов по плану; 6 - построение статистической модели; 7 - проверка адекватности модели; 8 - корректировка модели; 9 - исследование процесса с помощью модели; 10 - определение параметров оптимизации и ограничений; 11 - оптимизация процесса с помощью модели; 12 - экспериментальная информация средств автоматизации; 13 - управление процессом с помощью модели;

I - информационная модель;
 II - оптимизационная модель;
 III - модель управления

При статистическом моделировании вслед за постановкой задачи (1) производится отсеивание наименее важных факторов из большого числа входных переменных, влияющих на ход процесса (2). Выбранные для дальнейшего исследования входные переменные составляют список факторов x_1, x_2, \dots, x_k в (6.1), управляя которыми можно регулировать выходные параметры y_n . Количество

выходных параметров модели также следует по возможности уменьшить, чтобы сократить затраты на эксперименты и обработку данных.

При разработке статистической модели обычно ее структура (3) задается произвольно, в виде удобных для использования функций, аппроксимирующих опытные данные, а затем уточняется на основе оценки адекватности модели.

Наиболее часто используется полиномиальная форма модели. Так, для квадратичной функции:

$$y_n = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i,j=1, i \neq j}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 \quad (6.2)$$

где b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii} – коэффициенты регрессии.

Обычно сначала ограничиваются наиболее простой линейной моделью, для которой в (6.2) $b_{ii}=0, b_{ij}=0$. В случае ее неадекватности усложняют модель введением членов, учитывающих взаимодействие факторов x_i, x_j и (или) квадратичных членов x_i^2 .

С целью максимального извлечения информации из проводимых экспериментов и уменьшения их числа проводится планирование экспериментов (4) т.е. выбор количества и условий проведения опытов необходимых и достаточных для решения с заданной точностью поставленной задачи.

Для построения статистических моделей применяют два вида экспериментов: пассивный и активный. *Пассивный эксперимент* проводится в форме длительного наблюдения за ходом неуправляемого процесса, что позволяет собрать обширный ряд данных для статистического анализа. В *активном эксперименте* имеется возможность регулирования условий проведения опытов. При его проведении наиболее эффективно одновременное варьирование величины всех факторов по определенному плану, что позволяет выявить взаимодействие факторов и сократить число опытов.

На основе результатов проведенных экспериментов (5) вычисляют коэффициенты регрессии (6.2) и оценивают их статистическую значимость, чем завершается построение модели (6). Мерой адекватности модели (7) является дисперсия, т.е. среднеквадратичное отклонение вычисляемых значений от экспериментальных. Полученная дисперсия сопоставляется с допустимой при достигнутой точности экспериментов.

В случае неадекватности модели, ее корректировка (8) может потребовать включения дополнительных факторов, учета нелинейных эффектов, их взаимного влияния или изменения плана экспериментов. После этого повторно выполняются последующие этапы.

Использование модели, выдержавшей проверку адекватности для изучения (I), оптимизации (II), управления (III) процессом (9)-(13), аналогично соответствующим этапам (14)-(18) применения детерминированной модели (рис.5.1).

Лекция №16

ПОЛУЧЕНИЕ СТАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКА.

План:

1. Получение динамическое описание объектов.
2. Получение статическое описание по уравнения динамика.

При анализе протекающих в рабочей зоне технологических процессов, обычно выделяют типовые блоки. Вначале описывают *структуру потоков вещества и энергии* и исследуют гидро- и газодинамику процесса. Затем изучают *теплообмен и перенос вещества* с учетом выявленных потоков, *рассматривают кинетику химических реакций и физических превращений*. В завершение составляют *соотношения баланса*, отражающие законы сохранения (массы, импульса, энергии, заряда и т.д.) в исследуемой технологической системе.

В основе детерминированных математических моделей технологических процессов лежат физические законы гидродинамики, термодинамики, электродинамики и магнетизма, тепло- и массопереноса, химических и фазовых превращений.

На основе общих законов механики движение обрабатываемого материала (жидкости и газа) описывается рядом соотношений.

Уравнение сплошности, связывающее плотность движущейся среды ρ с ее скоростью \vec{v} :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \vec{v}) = J, \quad (7.1)$$

где J – объемный источник изменения массы вследствие химических и фазовых превращений; τ - время.

Уравнение Навье-Стокса для движения вязких сред под действием объемной силы \vec{F} :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}}{d\tau} &= \rho \left(\frac{d\vec{v}}{d\tau} + \text{grad} \frac{\vec{v}^2}{2} - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} \right) = \\ &= \vec{F} - \text{grad} \bar{p} - \eta \text{rot}(\text{rot} \vec{v}) + \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \text{grad}(\text{div} \vec{v}) \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $\vec{F} = \text{div} \vec{T}$, \vec{T} - тензор напряжений, \bar{p} - давление, $\eta = \rho\nu$, η - динамическая вязкость, ν - кинематическая вязкость, ζ - объемная вязкость.

Левая часть уравнения (3.2) содержит алгебраическую сумму локального и конвективного ускорения, в правой части слагаемые описывающие объемную силу, давление и силы сопротивления, вызванные вязкостью.

Система уравнений (3.1) и (3.2) позволяет определить неизвестные функции скоростей $\vec{v}(x, y, z, \tau)$ и давления $\bar{p}(x, y, z, \tau)$ при заданных значениях $\vec{F}(x, y, z, \tau)$, $J(x, y, z, \tau)$, ρ , η и ζ .

Тепло- и массоперенос

В технологии машиностроения традиционно широко используются процессы механической и термической обработки. В настоящее время все чаще механическую обработку интенсифицируют тепловыми воздействиями (рис.7.1), а термическую обработку совмещают с деформированием (рис.7.2).

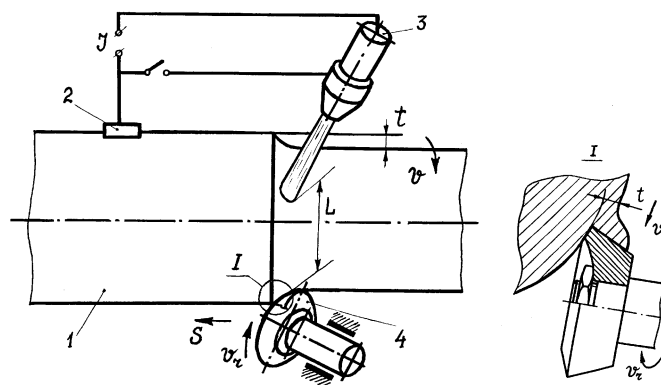


Рис.7.1. Ротационная обработка с предварительным нагревом:

1 – обрабатываемая деталь; 2 – скользящий контакт; 3 – плазмотрон; 4 – ротационный резец, v – скорость главного движения; v_r – скорость дополнительного движения; S – скорость подачи; t – глубина резания; L – расстояние от пятна нагрева до инструмента, I – сила тока плазменной дуги

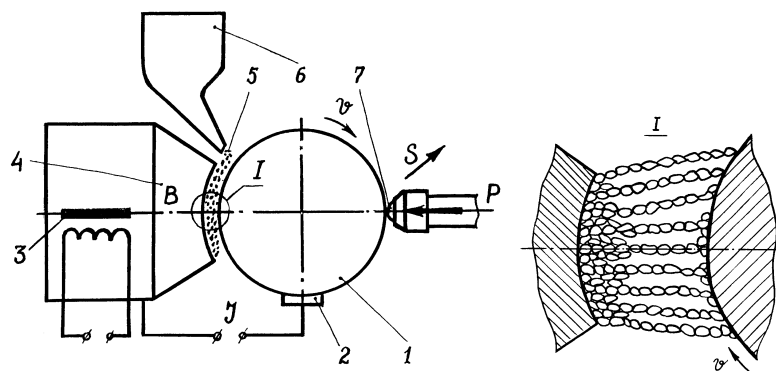


Рис. 1.5. Электромагнитная наплавка с поверхностным пластическим деформированием: 1 – обрабатываемая деталь; 2 – скользящий контакт; 3 – электромагнит; 4 – полюсный наконечник; 5 – ферромагнитный порошок; 6 – дозирующее устройство; 7 – шариковый обкатник; v – скорость главного движения; S – скорость подачи; P – усилие деформирования; B – магнитная индукция; I – сила тока электродуговых разрядов.

В этой связи особую актуальность приобретают расчеты процессов тепло- и массопереноса в технологической зоне обрабатывающей системы.

Уравнение непрерывности потока для теплоты:

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial \tau} + \operatorname{div} \vec{F}_q = 0,$$

где \vec{F}_q – плотность теплового потока, ρ_q – плотность количества теплоты:

$$\rho_q(r) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q(r)}{\Delta V} \right),$$

здесь $\Delta Q(r)$ – количество теплоты в малом объеме ΔV вокруг точки r .

В предположении, что плотность ρ и удельная теплоемкость c не зависят от температуры, с учетом закона Фурье:

$$F_q = -\lambda \cdot \operatorname{grad} \theta$$

где λ – коэффициент теплопроводности, θ – температура.

Получим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \left(-\frac{\lambda}{c\rho} \operatorname{grad} \theta \right) = \omega \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} \theta) \quad (7.4)$$

здесь ω – коэффициент температуропроводности, $\omega = \lambda/(c\rho)$

При изучении диффузии закон Фурье для теплопроводности заменяют уравнением Фика для концентрации вещества, а коэффициент теплопроводности ω – коэффициентом диффузии D .

Уравнения (7.3) и (7.4) дают решения для температуры $\theta(x, y, z, \tau)$ и теплоты $Q(x, y, z, \tau)$ при заданных и начальных и граничных условиях конкретных значениях ρ, c и λ .

Лекция №17

СОСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО МОДЕЛИ ПО НЕЛИНЕЙНОГО
УРАВНЕНИЯ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ.

План:

1. Составление линейного модели по нелинейного уравнения статики.
2. Составление линейного модели по нелинейного уравнения динамики.

Воздействие на обрабатываемую деталь концентрированными потоками энергии приводит к структурным превращениям в ее поверхностном слое (рис.8.1) и химическим реакциям в ванне расплава (рис.8.2).

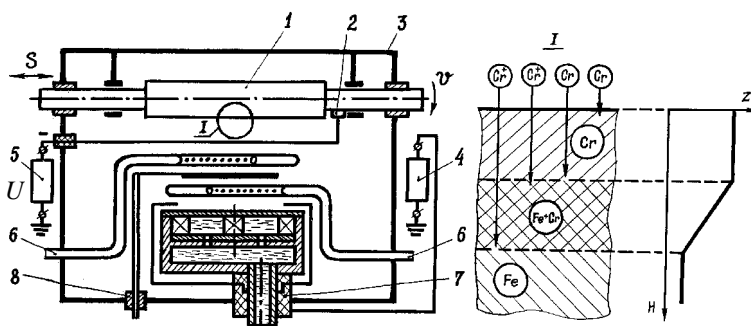


Рис.8.1. Ионная имплантация с осаждением покрытия:

1 – обрабатываемая деталь; 2 – скользящий контакт; 3 – вакуумная камера; 4 – источник питания магнетрона; 5 – источник питания постоянного напряжения; 6 – подача газа; 7 – магнетрон; 8 – заслонка; v – скорость главного движения; S – скорость подачи; U – ускоряющее напряжение; I – сила тока

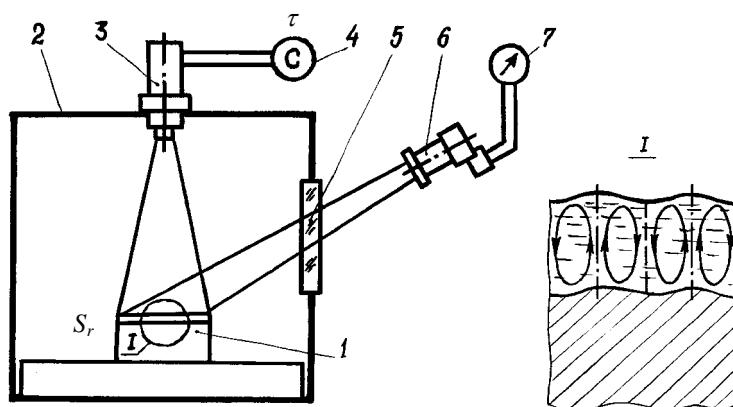


Рис.8.2. Электроннолучевой нагрев поверхности:

1 – обрабатываемая деталь; 2 – вакуумная камера; 3 – электронная пушка с системами фокусировки и развертки; 4 – секундомер; 5 – иллюминатор; 6 – пирометр; 7 – милливольтметр; S_r – площадь пятна нагрева; τ – время обработки; U – ускоряющее напряжение; I – сила тока электронного пучка

Изучение физико-химических превращений складывается из анализа стехиометрических соотношений уравнения равновесия и описания кинетических закономерностей.

Стехиометрическое уравнение является кратким выражением материального баланса реакции:

$$\sum_{i=1}^m \nu_i A_i = \nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \dots + \nu_m A_m = 0, \quad (8.1)$$

где ν_i - стехиометрические коэффициенты, для исходных веществ $\nu_i < 0$, для продуктов реакции $\nu_i > 0$, A_i – символы веществ участвующих в реакции.

Расчет физико-химического равновесия позволяет выявить возможность получения тех или иных веществ в требуемых количествах, а также оценить содержание в них примесей и побочных веществ. Существует несколько методов термодинамического анализа сложных систем. Простейшие основаны на решении системы уравнений, образованных выражениями для констант равновесия, совместно с уравнениями стехиометрического баланса (8.1). Для многокомпонентных гетерогенных систем, к которым в первую очередь относятся технологические системы, применяются методы основанные на использовании принципов максимума энтропии и минимума свободной энергии Гиббса.

Кинетика реакций и превращений описывается скоростью ω_r изменения массы реагентов M в единице объема V для гомогенных реакций

$$\omega_r = \frac{1}{V} \frac{dM}{d\tau}$$

или на единицу поверхности S_r для гетерогенных процессов

$$\omega_r = \frac{1}{S_r} \frac{dM}{d\tau}.$$

Зависимость скорости реакции от концентрации реагирующих веществ

$$\omega_r = k[A_1]^{n_1} [A_2]^{n_2} \dots [A_m]^{n_m},$$

где n_i – порядок реакции по веществу A_i , ($i=1, 2, \dots, m$), k – константа скорости процесса, выражаемая через энергию активации E уравнением Аррениуса:

$$k = k_0 \exp\left(\frac{-E}{RT}\right)$$

здесь k_0 – предэкспоненциальный множитель, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура.

Для исследования структурных изменений и фазовых переходов в процессах физико-технической обработки на основании анализа движения потоков вещества и энергии, тепло- и массопереноса, электромагнитных, ионно-лучевых процессов, химических реакций и физических превращений, используются уравнения баланса.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0; \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) + \text{div} \vec{P} = \rho \sum_{i=1}^K \vec{F}_{m_i}; \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho e \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{F}_q = \sum_{i=1}^K \vec{F}_{m_i} \vec{F}_{\alpha_i} - \vec{P} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}; \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho s \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{F}_s = \sigma \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial \tau} + \operatorname{div}(C_i \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{F}_{\alpha_i} = \sum_{r=1}^{R_0} \nu_{ir} \omega_r; \quad (9.5)$$

где

$$\rho = \sum_{i=1}^K M_i C_i; \quad (9.6)$$

$$F_s = \frac{\left(\vec{F}_q - \sum_{i=1}^K \vec{F}_{\alpha_i} W_i \right)}{T}; \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma = & \vec{F}_q \left(\operatorname{grad} \frac{1}{T} \right) - \sum_{i=1}^K \vec{F}_{\alpha_i} \left(\operatorname{grad} \frac{W_i}{T} - \frac{\vec{F}_{m_i}}{T} \right) - \\ & - \left(\frac{1}{T} \right) \vec{P}_q \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \left(\frac{1}{T} \right) \sum_{i=1}^K W_i \sum_{r=1}^{R_0} \nu_{ir} \omega_r; \end{aligned} \quad (9.8)$$

здесь ρ - плотность обрабатываемого материала, $\rho \vec{v}$ - плотность импульса, ρe - плотность внутренней энергии, ρs - плотность энтропии, C_i - концентрация i -го компонента, τ - текущее время, \vec{P} - тензор давления, K - число компонентов, \vec{F}_{m_i} - массовая сила действующих на i -тый компонент, \vec{F}_q - плотность теплового потока, \vec{F}_{α_i} - плотность диффузионного потока i -го компонента, \vec{F}_s - плотность потока энтропии, σ - производство энтропии, R_0 - число протекающих реакций, ν_{ir} - стехиометрический коэффициент i -го компонента в r -ой реакции, ω_r - скорость r -ой реакции, M_i - молекулярная масса i -го компонента, W_i - химический потенциал i -го компонента, T - абсолютная температура, \vec{P}_q - диссипативная часть тензора давления, описывающего вязкие силы.

Уравнения баланса, характеризующие сплошность материала $\partial \rho$ (9.1), законы сохранения вещества ∂C_i (9.5), импульса $\partial(\rho \vec{v})$ (9.2) и энергии $\partial(\rho e)$ (9.3), а также второе начало термодинамики $\partial(\rho s)$ (9.4) в процессе интенсивной обработки, описывающие состояние материала с плотностью ρ (9.6), энтропией S (9.7) и ее производством σ (9.8) определяют кинетику технологических процессов и устанавливают последовательность образования структур и фаз при увеличении мощности воздействий.

Сложность уравнений баланса и состояния, необходимость дополнительных начальных и граничных условий приводит к необходимости использования упрощенных моделей структуры технологических потоков.

Лекция №18
СТРУКТУРНЫЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПОТОКОВ.

План:

1. Структурные модели технологических потоков.
2. Параметрические модели технологических потоков.

Для исследования структурных изменений и фазовых переходов в процессах физико-технической обработки на основании анализа движения потоков вещества и энергии, тепло- и массопереноса, электромагнитных, ионно-лучевых процессов, химических реакций и физических превращений, используются уравнения баланса.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0; \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{P} = \rho \sum_{i=1}^K \vec{F}_{m_i}; \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho e \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{F}_q = \sum_{i=1}^K \vec{F}_{m_i} \vec{F}_{\alpha_i} - \vec{P} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}; \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho s \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{F}_s = \sigma \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial \tau} + \operatorname{div}(C_i \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{F}_{\alpha_i} = \sum_{r=1}^{R_0} \nu_{ir} \omega_r; \quad (9.5)$$

где

$$\rho = \sum_{i=1}^K M_i C_i; \quad (9.6)$$

$$F_s = \frac{\left(\vec{F}_q - \sum_{i=1}^K \vec{F}_{\alpha_i} W_i \right)}{T}; \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma = & \vec{F}_q \left(\operatorname{grad} \frac{1}{T} \right) - \sum_{i=1}^K \vec{F}_{\alpha_i} \left(\operatorname{grad} \frac{W_i}{T} - \frac{\vec{F}_{m_i}}{T} \right) - \\ & - \left(\frac{1}{T} \right) \vec{P}_q \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \left(\frac{1}{T} \right) \sum_{i=1}^K W_i \sum_{r=1}^{R_0} \nu_{ir} \omega_r; \end{aligned} \quad (9.8)$$

здесь ρ - плотность обрабатываемого материала, $\rho\bar{v}$ - плотность импульса, ρe - плотность внутренней энергии, ρs - плотность энтропии, C_i - концентрация i -го компонента, τ - текущее время, \bar{P} - тензор давления, K - число компонентов, \vec{F}_{m_i} - массовая сила действующих на i -тый компонент, \vec{F}_q - плотность теплового потока, \vec{F}_{α_i} - плотность диффузионного потока i -го компонента, \vec{F}_s - плотность потока энтропии, σ - производство энтропии, R_0 - число протекающих реакций, ν_{ir} - стехиометрический коэффициент i -го компонента в r -ой реакции, ω_r - скорость r -ой реакции, M_i - молекулярная масса i -го компонента, W_i - химический потенциал i -го компонента, T - абсолютная температура, \bar{P}_q - диссипативная часть тензора давления, описывающего вязкие силы.

Уравнения баланса, характеризующие сплошность материала $\partial\rho$ (9.1), законы сохранения вещества ∂C_i (9.5), импульса $\partial(\rho\bar{v})$ (9.2) и энергии $\partial(\rho e)$ (9.3), а также второе начало термодинамики $\partial(\rho s)$ (9.4) в процессе интенсивной обработки, описывающие состояние материала с плотностью ρ (9.6), энтропией S (9.7) и ее производством σ (9.8) определяют кинетику технологических процессов и устанавливают последовательность образования структур и фаз при увеличении мощности воздействий.

Сложность уравнений баланса и состояния, необходимость дополнительных начальных и граничных условий приводит к необходимости использования упрощенных моделей структуры технологических потоков.

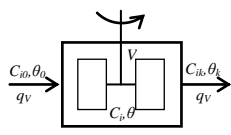
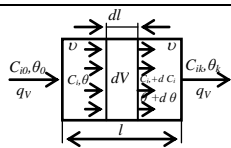
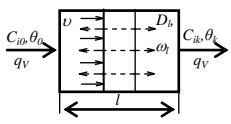
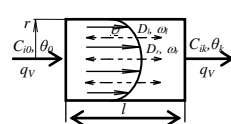
Структурные модели технологических потоков.

Технологически процессы сопровождаются движением потоков вещества и энергии (табл.10.1). Так как это движение часто сложно описать, а создаваемые при этом модели слишком громоздки, то в таких случаях применяют упрощенные *модели идеальных потоков* (табл.10.1, лек.2). В случаях неудовлетворительной точности моделей, в них вводят ряд параметров,

дополнительно описывающих структуру потока, создавая *модели неидеальных потоков* (табл.10.1, лек.9).

Таблица 10.1

Модели структуры технологических потоков

| № п/п | Наименование модели | Схема модели | Обозначения параметров |
|-------|---|---|--|
| 1 | Модель идеального смешения |  | q_v – объемный расход потока; V – объем рабочей зоны; C_{i0} , θ_0 – входные параметры, C_{ik} , θ_k – выходные параметры потока |
| 2 | Модель идеального вытеснения |  | v – скорость потока; l – координата |
| 3 | Диффузионная однопараметрическая модель |  | D_l и ω_l – коэффициенты диффузии и температуропроводности в продольном направлении |
| 4 | Диффузионная двухпараметрическая модель |  | r – координата, D_r и ω_r – коэффициенты диффузии и температуропроводности в поперечном направлении |

Параметрические модели технологических потоков.

Модель идеального смешения (табл.10.1, п.1) основывается на том, что поступающий в рабочую зону поток с расходом q_v мгновенно распределяется по всему объему перемешиваясь с массой, уже находящейся в рабочей зоне. В этом случае концентрации всех веществ C_{i0} и температура θ_0 равномерно распределены по всему объему V рабочей зоны, причем на выходе из нее значения C_i и θ точно такие же, что и в объеме. На входе C_i и θ претерпевают скачок, так как значения параметров входящего потока, мгновенно смешивающегося с содержимым рабочей зоны, изменяются до значений, отвечающих средним по объему зоны. Отношение q_v/V характеризует среднее время нахождения частиц потока в рабочей зоне при идеальном смешении.

Количество i -го вещества поступившего в зону за время $d\tau$, равно $C_{io}q_v d\tau$, а покинувшего ее - $C_i q_v d\tau$. В установившемся режиме, когда $C_{io} = const$, выполняется равенство $C_{io}q_v d\tau = C_i q_v d\tau$, т.е. накопление i -го вещества в рабочей зоне не происходит. При изменении в некоторый момент времени τ величины C_{io} установившийся режим нарушается, в результате чего концентрация в зоне за время $d\tau$ уменьшится на dC_i . Тогда изменение количества i -го компонента в объеме зоны составит VdC_i , причем оно равно разности между приходом и расходом i -го вещества

$$VdC_i = C_{io}q_v d\tau - C_i q_v d\tau,$$

или

$$dC_i/d\tau = \left(q_v/V\right)(C_{io} - C_i), \quad (10.1)$$

Аналогично при рассмотрении температуры получаем уравнение:

$$d\theta/d\tau = \left(q_v/V\right)(\theta_0 - \theta), \quad (10.2)$$

При протекании в рабочей зоне химической реакции со скоростью ω_i ($\omega_i > < 0$), сопровождающейся объемным тепловым эффектом Q ($Q > < 0$) в уравнениях (10.1) и (10.2) появляются дополнительные слагаемые с коэффициентами ω_i и $Q/c\rho$ соответственно.

Модель идеального вытеснения (табл.10.1, п. 2) основывается на том, что поток движется равномерно со скоростью v без перемешивания в продольном направлении, при однородном распределении параметров в поперечном направлении.

В установившемся режиме ($C_{io} = C_{ik} = const$) накопление вещества в объеме dV не происходит. При изменении состава потока на входе C_{io} концентрация i -го компонента при прохождении потоком некоторого сечения с бесконечно малой толщиной dl изменится на величину dC_i и на выходе из него составит величину $C_i + dC_i$. Изменение C_i на входе в сечение происходит вследствие того, что надвигающийся со скоростью v на выбранное сечение поток характеризуется иной текущей величиной C_i . При полном вытеснении потока изменение количества компонента i в объеме dV за время $d\tau$ составит $dVdC_i$, что равно разности между приходом и расходом компонента за это же время:

$$dVdC_i = C_i q_v d\tau - (C_i + dC_i) q_v d\tau;$$

или

$$\frac{dC_i}{d\tau} = -\frac{q_v dC_i}{dV} = -\frac{\nu dC_i}{dl} \quad (10.3)$$

Аналогично (10.3) выводится уравнение, описывающее изменение температуры в потоке со структурой, близкой к идеальному вытеснению:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{q_v d\theta}{dV} = -\frac{\nu d\theta}{dl}. \quad (10.4)$$

Лекция №19

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ ПОТОКОВ В АППАРАТЕ.

План:

1. Математическое описание структуры потоков в аппарате.
2. Параметрические модели технологических потоков.

Поведение потоков в реальных аппаратах настолько сложно, что в настоящее время дать строгое математическое описание их в большинстве случаев не представляется возможным. В то же время известно, что структура потоков оказывает существенное влияние на эффективность химико-технологических процессов, поэтому ее необходимо учитывать при моделировании процессов. При этом математические модели структуры потоков являются основой, на которой строится математическое описание химико-технологического процесса. Как уже отмечалось, точное описание реальных потоков (например, с помощью уравнения Навье-Стокса) приводит к чрезвычайно трудным для решения задачам. Поэтому разработанные к настоящему времени модели структуры потоков в аппаратах являются достаточно простыми и носят полуэмпирический характер. Тем не менее, уже они позволяют получать модели, достаточно точно отражающие реальный физический процесс (модели, адекватные объекту).

При проведении химико-технологических процессов часто важно знать степень полноты их завершения, что, в свою очередь, зависит от распределения по времени пребывания частиц потока в аппарате, поскольку некоторые доли потока могут задерживаться в аппарате, а другие, наоборот, проскакать, что непосредственно связано с временем контакта и диффузией.

Распределение времени пребывания частиц потока в аппарате (РВП) имеет стохастическую природу и оценивается статистическим распределением.

Наиболее существенными источниками неравномерности распределения элементов потока по времени пребывания в промышленных аппаратах являются: 1) неравномерность профиля скоростей системы; 2) Турбулизация потоков; 3) наличие застойных областей в потоке; 4) каналообразование, байпасные и перекрестные токи в системе; 5) температурные градиенты движущихся сред; 6) тепло- и массообмен между фазами и т.п.

Может оказаться, что истинное время пребывания в аппарате частиц потока недостаточно для осуществления процесса диффузии, а от этого зависит эффективность всего диффузионного процесса в целом. Поэтому важным является учет реальной структуры потоков фаз в аппарате (а, следовательно, по времени пребывания) с помощью модельных представлений о внутренней структуре потоков.

Для процессов массопередачи описание структуры потоков имеет еще и тот смысл, что позволяет установить перемещение и распределение веществ в

этих потоках. Поэтому все гидродинамические модели потоков записываются преимущественно в виде уравнений, определяющих изменение концентрации вещества в потоке.

Далее будут рассмотрены экспериментальные методы исследования структуры потоков в реальных аппаратах, наиболее распространенные математические модели структуры потоков и методы определения параметров моделей.

2.1. Методы исследования структуры потоков

Сущность указанных методов заключается в том, что в поток на входе его в аппарат каким-либо способом вводят индикатор, а на выходе потока из аппарата измеряют концентрацию индикатора как функцию времени. Эта выходная кривая называется функцией отклика системы на типовое возмущение по составу потока. В качестве индикаторов используют красители, растворы солей и кислот, изотопы и другие вещества.

Основным требованием, предъявляемым к индикатору, является условие поведения частиц индикатора в аппарате подобно поведению частиц потока. С этой точки зрения лучшими индикаторами являются изотопы, так как они мало различаются с основным потоком по свойствам. На практике часто применяют индикаторы, которые не вступают во взаимодействие с основным потоком и могут быть легко замерены. К таким индикаторам относятся растворы солей. Индикатор на входе по

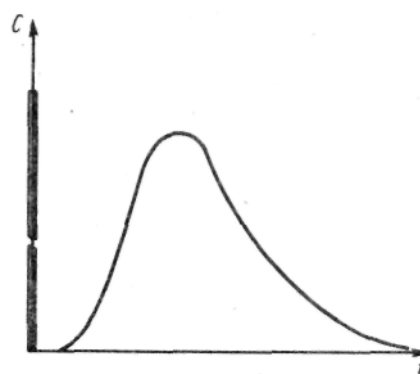


Рис. 2.1 Типичная функция отклика системы на импульсное возмущение

тока в аппарат вводят в виде стандартных сигналов: импульсного, ступенчатого и циклического. В зависимости от вида возмущающего сигнала различают методы исследования структуры потоков: импульсный, ступенчатый и циклический. Последний сигнал на практике обычно имеет форму синусоиды.

Оценка реальных технологических потоков рабочей зоны, в которой происходит продольное и радиальное перемешивание в результате конвекции и молекулярной диффузии, проводится на основе диффузионной модели (табл.10.1, лек.8). Основой диффузионной модели служит модель идеального вытеснения (10.3) и (10.4), осложненная обратным продольным и поперечным перемешиванием.

Если при построении модели учитывают только продольное перемешивание, а в поперечном направлении технологические факторы полагают постоянными, то такая модель называется *однопараметрической* (табл.10.1, п.3).

$$\frac{dC_i}{d\tau} = -\frac{\nu dC_i}{dl} + \frac{D_l d^2 C_i}{dl^2}; \quad (11.1)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{\nu d\theta}{dl} + \frac{\omega_l d^2 \theta}{dl^2}; \quad (11.2)$$

где D_l и ω_l коэффициенты диффузии и температуропроводности в продольном направлении.

Если задача требует, чтобы математическое описание учитывало еще и поперечное перемешивание, то в (11.1) и (11.2) дополнительно вводят по второму параметру, описывающему перемешивание в поперечном направлении. Модель становится *двухпараметрической* (табл.10.1, п.4) и записывается в частных производных. Так в цилиндрических координатах

$$\frac{dC_i}{d\tau} = -\frac{\nu dC_i}{dl} + \frac{D_l \partial^2 C_i}{\partial l^2} + \frac{D_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_i}{\partial r} \right); \quad (11.3)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{\nu d\theta}{dl} + \frac{\omega_l \partial^2 \theta}{\partial l^2} + \frac{\omega_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right); \quad (11.4)$$

где D_r и ω_r - коэффициент диффузии и температуропроводности в поперечном направлении.

В тех случаях когда описанные модели (10.1)-(11.4) не отражают с требуемой точностью реального характера технологических процессов, используют *комбинированные модели*, содержащие их параллельное и последовательное включение с учетом образования застойных зон, обратной и шунтирующей циркуляции.

Кроме рассмотренных концентрации C_i и температуры θ математические модели потоков вещества и энергии могут содержать уравнения для других технологических факторов, а также учитывать анизотропность свойств обрабатываемого материала с течением времени и по различным направлениям.

При возникновении трудностей в использовании аналитической модели, для получения которой требуется принимать допущения о постоянстве параметров дифференциальных уравнений (7.1)-(9.8) и (10.1)-(11.4), во многих случаях целесообразно решать задачи с произвольным законом изменения параметров, применяя численные решения.

Обычно для решения дифференциальных уравнений используют разностные методы. Исходное дифференциальное уравнение, общий вид которого может быть представлен выражением

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (12.1)$$

для численного решения преобразуется к разностному виду введением дискретных переменных $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$. Обычно дают равномерное приращение независимой переменной Δx , откуда $x_i = x_0 + i\Delta x$, где $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Тогда (12.1) в разностной форме

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = f_i(x, y)$$

откуда

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x f_i(x, y) \quad (12.2)$$

В результате (12.2) позволяет по известному значению y_i и $f_i(x, y)$ на предыдущем i -том шаге по x найти y на последующем $(i+1)$ -ом шаге.

Чтобы осуществить этот процесс вычислений вплоть до n -го шага надо задать начальное $y(x_0) = y_0$. Вид функции $f_i(x, y)$ зависит от принятого метода вычисления производной (табл.12.1).

В простейшем случае, реализующем метод Эйлера, задают $f_i(x, y) = f(x_i, y_i)$, т.е. экстраполируют производную на целый шаг Δx вперед, вычислив ее значение в предыдущей точке. При использовании методов повышенной точности Эйлера-Коши, Рунге-Кутта и др., погрешность решения может быть существенно снижена при сокращении времени расчетов.

Для проверки расчетов при численном интегрировании уравнения (12.1), необходимо задать величину шага Δx , от которого зависят погрешность вычислений δy и затраты времени на расчеты. Для оценки погрешности, вносимой численным методом решения задачи, используют два приема.

Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений

| № п/п | Наименование метода | Расчетная формула | Обозначения | Порядок погрешности, S |
|-------|----------------------------------|---|--|------------------------|
| 1 | Метод Эйлера | $y_{i+1} = y_i + \Delta x f(x_i, y_i)$ | | 2 |
| 2 | Усовершенствованный метод Эйлера | $y_{i+1} = y_i + \Delta x/2 \times [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)]$ | $x_{i+1} = x_i + \Delta x;$ $y_{i+1}^* = y_i + \Delta x f(x_i, y_i)$ | 2 |
| 3 | Метод Эйлера – Коши | $y_{i+1} = y_i + \Delta x f(x_{i+0.5}, y_{i+0.5})$ | $x_{i+0.5} = x_i + \Delta x/2;$ $y_{i+0.5} = y_i + \Delta x/2 \times f(x_i, y_i)$ | 3 |
| 4 | Метод Рунге - Кутты | $y_{i+1} = y_i + \Delta x/6(k_1 + 4k_2 + k_3)$ | $k_1 = \Delta x f(x_i, y_i);$ $k_2 = \Delta x \times f(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2});$ $k_3 = \Delta x f(x_i + \Delta x, y_i + 2k_2 - k_1)$ | 4 |

При первом, сопоставляют численные данные с результатами известного аналитического решения, являющегося при постоянных параметрах модели ее частным случаем.

При втором, сопоставляют результаты повторного решения задачи с последовательно уменьшаемой величиной шага Δx . Если произвести вычисления, изменив Δx , в два раза, то для оценки δy можно воспользоваться приближенной формулой Рунге:

$$\delta y_{\Delta x} = \frac{[y(2\Delta x) - y(\Delta x)]2^S}{(2^S - 1)},$$

где $y(2\Delta x)$ и $y(\Delta x)$ - расчетные значения полученные соответственно с шагом $2\Delta x$ и Δx , S - порядок погрешности, присущий выбранному методу (табл.12.1).

При уменьшении шага Δx , расчетные зависимости $y(x)$ сходятся к точному решению. Во многих случаях желательно предусмотреть автоматический выбор шага Δx , по оценке погрешности получаемого результата. В этих случаях сравнивают погрешность с заданной предельной ошибкой δy_{max} и если $\delta y > \delta y_{max}$ повторяют вычисления с уменьшенным шагом $\Delta x^* = \alpha(\Delta x)$, в котором обычно $\alpha = 0,8 \dots 0,9$.

После устранения вычислительной погрешности, можно приступить к оценке адекватности модели, так как остаточная погрешность связана только с погрешностями физической модели и ее математической реализации.

Математические модели связывают входные (независимые) переменные процесса $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемые воздействиями, с выходными (зависимыми)

характеристиками $Y(y_1, y_2, \dots, y_m)$ (рис. 3.1), которые обычно именуют откликами, в виде уравнения связи

$$Y=f(X) \quad (3.1)$$

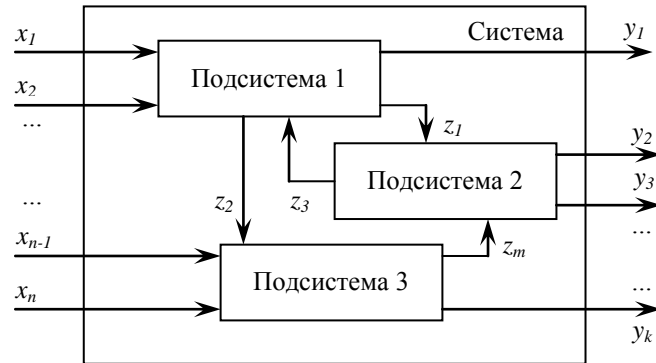


Рис. 3.1. Модель системы детерминированных процессов.

Любому реальному процессу свойственны случайные колебания, вызываемые физической изменчивостью каких-либо факторов $x_i \pm \Delta x_i(\tau)$ или внешними случайными воздействиями. В силу этого при равном среднем значении входных характеристик $X(\tau)$ в моменты τ_1 и τ_2 выходные параметры $Y(\tau)$, будут неодинаковыми (рис.3.2). Поэтому для вероятностных процессов, где по сравнению с $x_i(\tau)$ нельзя пренебречь случайными колебаниями $\Delta x_i(\tau)$ и

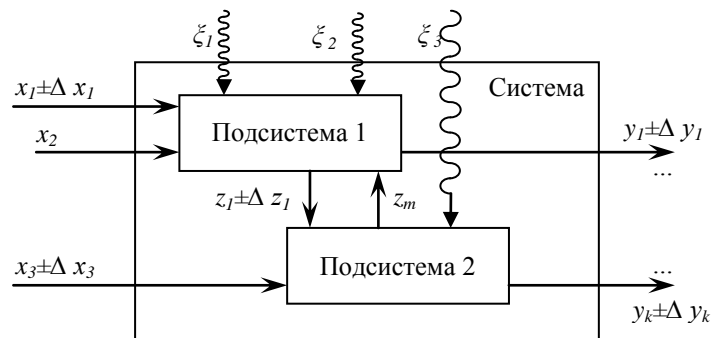


Рис.3.2. Модель системы стохастических процессов

случайными внешними воздействиями $\xi_j(\tau)$, необходимо характеризовать систему с учетом статистического закона распределения мгновенных значений $Y(\tau)$ относительно средней величины $Y_{cp}(\tau)$ уравнением

$$Y(\tau) = Y_{cp}(\tau) \pm \Delta Y(\tau) = f(X_{cp}) + \zeta(\Delta X, \xi) \quad (3.2)$$

Модели, отображающие случайный (стохастический) характер параметров и факторов системы, называются *статистическими* или *стохастическими* в отличие от *детерминированных*, не учитывающих вероятностных характеристик процессов.

По мере уменьшения величины параметров ΔX и ξ уравнение (3.2) приближается по структуре к уравнению (1.1), описывающему детерминированные системы.

Обычно детерминированные модели (3.1), представляющие собой систему уравнений, удастся составить только в тех случаях, когда о процессах в описываемой системе имеются ясные физические представления и эти представления можно формализовать. В таких случаях говорят, что система представляет собой «белый ящик» - объект с известной структурой и функциями.

Однако получаемая таким образом модель может оказаться громоздкой, а ее информационное обеспечение весьма трудоемким. Поэтому часто используют статистические модели для описания детерминированных систем. В таких случаях рассматривают систему как «черный ящик» с неизвестной структурой, в котором доступны для изучения только контролируемые входные параметры X и измеримые выходные характеристики Y . Получив таблицу соответствий $\{x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n\}$, принимают их за случайную выборку из генеральной статистической совокупности $\{X, Y\}$ и описывают соотношением (3.2). Полученная статистическая модель при соответствующей интерпретации результатов позволяет раскрыть механизм, сделать «белыми» некоторые части устройства и функционирования «черного ящика».

Детерминированные модели (3.1), могут также использоваться для описания стохастических систем, если объектом изучения являются их усредненные характеристики. Таким образом, статистические модели являются более широким классом моделей и включают детерминированные модели как предельный частный случай, в котором выходные параметры Y однозначно определяются входными переменными X .

Соотношения (3.1) и (3.2) являются математическими моделями процессов, приближенно описывающими происходящие в системе изменения. Если доказано подобие натуральных и моделирующих процессов, то можно говорить об *адекватности моделей*.

В зависимости от характера и пространственной структуры описываемых систем различаются модели с *распределенными* и *сосредоточенными параметрами*. В связи с различной интенсивностью моделируемых процессов во времени различают: *статические модели*, описывающие установившиеся процессы вблизи состояния равновесия; *стационарные модели*, характеризующиеся постоянством основных параметров во времени; *динамические модели* систем, в которых входной переменной процесса является время.

В зависимости от конкретного вида применяемого математического аппарата, различают модели матричные, сетевые, дифференциальные, интегральные, алгоритмические, программные и др.

Лекция №20

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ПОТОКОВ. ИМПУЛЬСНЫЙ МЕТОД.

План:

1. Математическое описание структуры потоков в аппарате.
2. Импульсный метод.

Сущность указанных методов заключается в том, что в' поток на входе его в аппарат каким-либо способом вводят индикатор, а на выходе потока из аппарата измеряют концентрацию индикатора как функцию времени. Эта выходная кривая называется функцией отклика системы на типовое возмущение по составу потока. В качестве индикаторов используют красители, растворы солей и кислот, изотопы и другие вещества.

Основным требованием, предъявляемым к индикатору, является условие поведения частиц индикатора в аппарате подобно поведению частиц потока. С этой точки зрения лучшими индикаторами являются изотопы, так как они мало различаются с основным потоком по свойствам. На практике часто применяют индикаторы, которые не вступают во взаимодействие с основным потоком и могут быть легко замерены. К таким индикаторам относятся растворы солей. Индикатор на входе по

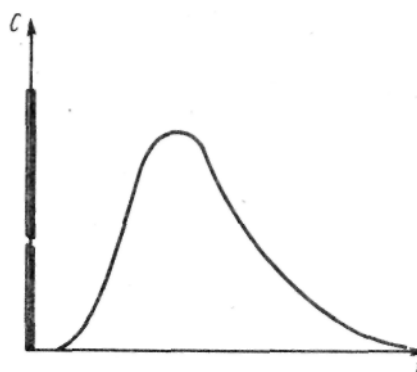


Рис. 2.1 Типичная функция отклика системы на импульсное возмущение

тока в аппарат вводят в виде стандартных сигналов: импульсного, ступенчатого и циклического. В зависимости от вида возмущающего сигнала различают методы исследования структуры потоков: импульсный, ступенчатый и циклический. Последний сигнал на практике обычно имеет форму синусоиды.

Импульсный метод. В соответствии с этим методом в поток на входе его в аппарат практически мгновенно, в виде дельта-функции, вводят определенное количество индикатора.

Допустим, что в поток на входе его в аппарат произвольной сложности ввели практически мгновенно индикатор и определили функцию отклика на это возмущение, изображенную на рис. 2.1. Обозначим объем аппарата через V и объемную скорость потока — через v .

Количество индикатора, время пребывания которого в аппарате изменяется от t до $t + dt$, составляет

$$dg = v C_3(t) dt. \quad (2.1)$$

Отношение dg ко всему количеству индикатора g выражает долю индикатора, вышедшего из аппарата за время от t до $t+dt$:

$$d\rho = \frac{dg}{g} = \frac{v C_3(t) dt}{g}. \quad (2.2)$$

Так как поведение индикатора в аппарате идентично поведению основного потока, то выражение (2.1) представляет собой долю потока, время пребывания которого изменяется от t до $t + dt$.

Введем безразмерную концентрацию $C(\theta)$ по формуле:

$$C(\theta) = \frac{C_3(t)}{C_0^3}, \quad (2.3)$$

где C_0^3 — начальная концентрация в потоке:

$$C_0^3 = \frac{g}{V}. \quad (2.4)$$

Одновременно введем безразмерное время θ по формуле

$$\theta = \frac{t}{\bar{t}}, \quad (2.5)$$

где \bar{t} - среднее время пребывания частиц потока в аппарате:

$$\bar{t} = \frac{V}{v}. \quad (2.6)$$

Теперь уравнение (2.2) можно привести к виду

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{v C_3(t) dt}{g} = v \frac{C_0^3 C_3(t)}{C_0^3} \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{\bar{t} dt}{\bar{t}} = \\ &= \frac{v C_0^3 \bar{t}}{g} C(\theta) d\theta = \frac{v C_0^3 V}{g v} C(\theta) d\theta = C(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Общее количество введенного индикатора определяется выражением

$$g = v \int_0^{\infty} C_3(t) dt. \quad (2.8)$$

Тогда из уравнений (2,2), (2.7) следует

$$C(\theta) = \frac{v C_3(t) dt}{g d\theta} = \frac{v C_3(t) \bar{t}}{g} = \frac{C_3(t)}{\int_0^{\infty} C_3(t) dt} \bar{t} = C(t) \bar{t}, \quad (2.9)$$

где выражение

$$C(t) = \frac{C_3(t)}{\int_0^{\infty} C_3(t) dt} \quad (2.10)$$

задает нормированную С-кривую.

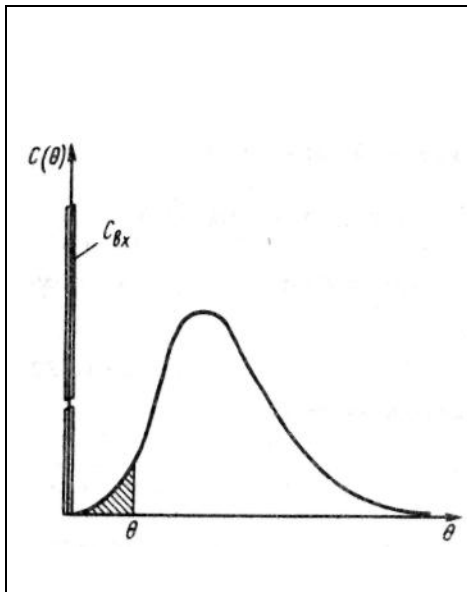


Рис.2.2. Типичная С-кривая

Построим экспериментальную кривую в координатах $C(\theta)$, в (рис. 2.2). Такая кривая называется С-кривой. Заштрихованная площадь под ней равна

$$\int_0^{\theta} C(\theta) d\theta \quad (2.11)$$

и означает долю потока, время пребывания которого в аппарате изменяется от 0 до θ . Естественно, что

$$\int_0^{\theta} C(\theta) d\theta = 1 \quad (2.12)$$

Таким образом, С-кривая является характеристикой распределения элементов потока по времени их пребывания в аппарате.

Среднее время пребывания потока в аппарате есть

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} t dp \quad (2.13)$$

Поставим в это выражение значение dp из уравнения (3.2) и воспользуемся тем, что $g = v \int_0^{\infty} C_3(t) dt$. Тогда получим

$$\bar{t} = \frac{v \int_0^{\infty} t C_3(t) dt}{v \int_0^{\infty} C_3(t) dt} = \frac{\int_0^{\infty} t C_3(t) dt}{\int_0^{\infty} C_3(t) dt} \quad (2.14)$$

Пример 1. При исследовании гидродинамики потоков в аппарате использовался импульсный метод исследования. В результате нанесения им-

пульсного возмущения (импульсный ввод индикатора) были получены следующие значения концентрации индикатора на выходе из аппарата (табл. 2.1).

| Время, | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | '35 | Таблица 2.1 |
|--------------|---|---|----|----|----|----|----|-----|-------------|
| Концентрация | 0 | 3 | 5 | 5 | 4 | 2 | 1 | 0 | |

Построить С-кривую распределения.

Решение. Для определения функции $C(\theta)$ предварительно найдем значения $C(t)$ в уравнении (2.9). Для этого вычислим сумму значений $\sum_i C_i(t) \Delta t$, полагая интервал времени отбора проб $\Delta t = 5$ мин:

$$\int_0^{\infty} C_i(t) dt \approx \sum_i v \int_0^{\infty} C_i^{\ominus}(t) \Delta t = (3+5+5+4+2+1) \cdot 5 = 100 \frac{\text{г} \cdot \text{мин}}{\text{м}^3}.$$

Значения нормированной функции $C(t) = C_i^{\ominus}(t) / \sum_i C_i^{\ominus}(t) \Delta t$ в зависимости от времени сведем в табл. 2.2.

Таблица 2.2

| Значения нормированной функции $C(t)$ | | | | | | | |
|---------------------------------------|---|------|------|------|------|------|------|
| t, мин. | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| $C(t) \text{ мин}^{-1}$ | 0 | 0,03 | 0,05 | 0,05 | 0,04 | 0,02 | 0,01 |

Чтобы получить функцию $C(\theta)$, приводим время к безразмерному виду θ и C - к виду $C(\theta)$. Для этого находим среднее время пребывания в аппарате из уравнения (2.14):

Безразмерное время составит

$$\theta = \frac{t}{\bar{t}} = \frac{t}{15}.$$

Тогда, используя уравнение (2.9), имеем

$$C(\theta) = \bar{t} C(t) \approx \frac{15 C_i^{\ominus}(t)}{\sum_i C_i^{\ominus}(t) \Delta t}$$

и после подстановки значений t_i , C_i^{\ominus} получим соответствующие значения $C(\theta)$ (табл. 2.3).

Значения безразмерной функции $C(\theta)$
Табл.2.3

| | | | | | | | | |
|-------------|---|------|------|------|------|-----|------|-----|
| θ | 0 | 1/3 | 2/3 | 1 | 4/3 | 5/3 | 2 | 7/3 |
| $C(\theta)$ | 0 | 0,45 | 0,75 | 0,75 | 0,60 | 0,3 | 0,15 | 0 |

По этим данным строим С-кривую распределения (рис. 2.3).

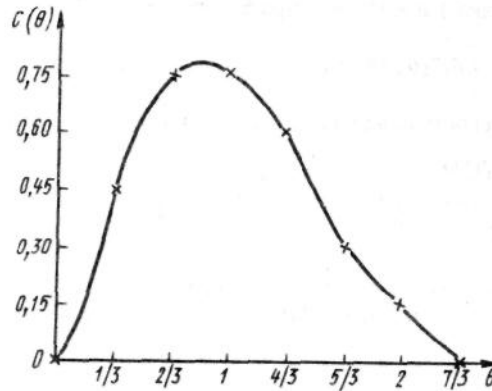


Рис. 2.3. Безразмерная С-кривая

Рассмотрим более общие случаи, в которых параметры каждой точки тела или среды зависят от параметров соседних точек. Описываются такие процессы нестационарными дифференциальными уравнениями в частных производных с краевыми условиями.

Численные решения таких задач целесообразно осуществить методом конечных разностей, вводя дискретные переменные τ, x, y, \dots, t , т.е. описывая время процесса: $\tau = k\Delta\tau$, а координаты пространственной сетки $\Delta x \times \Delta y \times \dots$: $x = i\Delta x$, $y = j\Delta y, \dots$

Откуда после замены производных конечными разностями для параметров t

$$\frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{t_{i,j}^{k+1} - t_{i,j}^k}{\Delta \tau};$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} \Rightarrow \frac{2\Delta t}{2\Delta x} = \frac{t_{i+1,j}^k - t_{i-1,j}^k}{2\Delta x};$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\Delta(\Delta t)}{\Delta x^2} = \frac{t_{i+1,j}^k - 2t_{i,j}^k + t_{i-1,j}^k}{\Delta x^2}; \dots$$

В результате подстановки в дифференциальное уравнение получим выражение для расчета параметра t в i, j -м узле сетки в $(k+1)$ -й момент времени по известным для k -го момента параметрам окружающих узлов сетки:

$$\begin{aligned} \frac{t_{i,j}^{k+1} - t_{i,j}^k}{\Delta\tau} = f[C_{i,j}^k(t), \frac{t_{i+1,j}^k - t_{i-1,j}^k}{2\Delta x}, \frac{t_{i+1,j}^k - 2t_{i,j}^k + t_{i-1,j}^k}{\Delta x^2}, \\ \frac{t_{i,j+1}^k - t_{i,j-1}^k}{2\Delta y}, \frac{t_{i,j+1}^k - 2t_{i,j}^k + t_{i,j-1}^k}{\Delta y^2}, \dots] \end{aligned} \quad (13.1)$$

где значения переменных $C_{i,j}^k(t)$ принимаются в соответствии с параметрами центрального узла сетки $t_{i,j}^k$ в k -й момент времени.

Уравнение типа (13.1) решается в явном виде относительно $t_{i,j}^{k+1}$, что позволяет последовательно обходя все узлы сетки по столбцам и строкам сеточного поля, определить распределение параметра t через время $\Delta\tau, 2\Delta\tau, \dots, k\Delta\tau$ от заданного в начальный момент $\tau=0$.

На границах тела, где уравнение (13.1) не может быть использовано, так как граничные точки не окружены со всех сторон узлами сетки, используется разностная форма граничных условий

$$\begin{aligned} \frac{t_{z+1}^k - t_z^k}{\Delta x} = \varphi[C_{z_1}^k(t_z^k)(t_n - t_z^k)] \\ \frac{t_{z+1}^k - t_z^k}{\Delta y} = \varphi[C_{z_2}^k(t_z^k)(t_n - t_z^k)], \dots, \end{aligned} \quad (13.2)$$

где t_{z+1}^k - параметр соседней с граничной внутренней точки тела, t_z^k - параметр граничной точки, t_n - значения параметра окружающей среды, $C_{z_1}^k, C_{z_2}^k, \dots$ - значения переменных, принимающиеся в зависимости от параметра t_z^k в k -й момент времени

Описанное в (13.1) и (13.2) приближение модели к реальному процессу по геометрии изделия, по действительной зависимости свойств от изменяющихся параметров с течением времени, позволяют вплотную подойти к построению *имитационной модели*. При необходимости в подобного рода моделях могут быть приняты в расчет особенности конкретных технологических процессов

воспроизводящие ход реального процесса во времени в различных точках рабочей зоны.

Математические модели связывают входные (независимые) переменные процесса $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемые воздействиями, с выходными (зависимыми) характеристиками $Y(y_1, y_2, \dots, y_m)$ (рис. 3.1), которые обычно именуют откликами, в виде уравнения связи

$$Y=f(X) \quad (3.1)$$

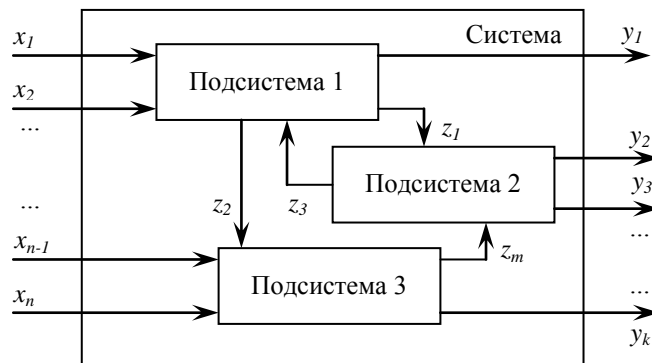


Рис. 3.1. Модель системы детерминированных процессов.

Любому реальному процессу свойственны случайные колебания, вызываемые физической изменчивостью каких-либо факторов $x_i \pm \Delta x_i(\tau)$ или внешними случайными воздействиями. В силу этого при равном среднем значении входных характеристик $X(\tau)$ в моменты τ_1 и τ_2 выходные параметры $Y(\tau)$, будут неодинаковыми (рис.3.2). Поэтому для вероятностных процессов, где по сравнению с $x_i(\tau)$ нельзя пренебречь случайными колебаниями $\Delta x_i(\tau)$ и

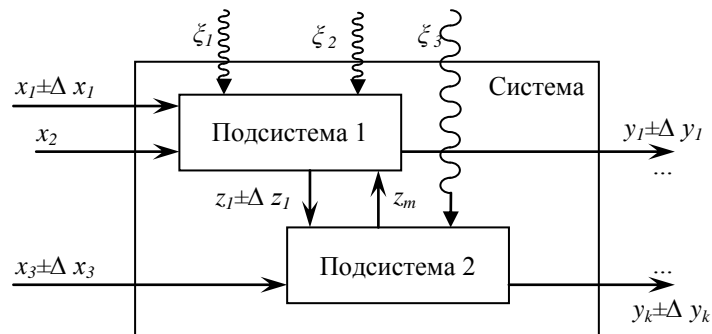


Рис.3.2. Модель системы стохастических процессов

случайными внешними воздействиями $\xi_j(\tau)$, необходимо характеризовать

систему с учетом статистического закона распределения мгновенных значений $Y(\tau)$ относительно средней величины $Y_{cp}(\tau)$ уравнением

$$Y(\tau) = Y_{cp}(\tau) \pm \Delta Y(\tau) = f(X_{cp}) + \zeta(\Delta X, \xi) \quad (3.2)$$

Модели, отображающие случайный (стохастический) характер параметров и факторов системы, называются *статистическими* или *стохастическими* в отличие от *детерминированных*, не учитывающих вероятностных характеристик процессов.

По мере уменьшения величины параметров ΔX и ξ уравнение (3.2) приближается по структуре к уравнению (1.1), описывающему детерминированные системы.

Обычно детерминированные модели (3.1), представляющие собой систему уравнений, удается составить только в тех случаях, когда о процессах в описываемой системе имеются ясные физические представления и эти представления можно формализовать. В таких случаях говорят, что система представляет собой «белый ящик» - объект с известной структурой и функциями.

Однако получаемая таким образом модель может оказаться громоздкой, а ее информационное обеспечение весьма трудоемким. Поэтому часто используют статистические модели для описания детерминированных систем. В таких случаях рассматривают систему как «черный ящик» с неизвестной структурой, в котором доступны для изучения только контролируемые входные параметры X и измеримые выходные характеристики Y . Получив таблицу соответствий $\{x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n\}$, принимают их за случайную выборку из генеральной статистической совокупности $\{X, Y\}$ и описывают соотношением (3.2). Полученная статистическая модель при соответствующей интерпретации результатов позволяет раскрыть механизм, сделать «белыми» некоторые части устройства и функционирования «черного ящика».

Детерминированные модели (3.1), могут также использоваться для описания стохастических систем, если объектом изучения являются их усредненные характеристики. Таким образом, статистические модели являются более широким классом моделей и включают детерминированные модели как предельный частный случай, в котором выходные параметры Y однозначно определяются входными переменными X .

Соотношения (3.1) и (3.2) являются математическими моделями процессов, приближенно описывающими происходящие в системе изменения. Если доказано подобие натуральных и моделирующих процессов, то можно говорить об *адекватности моделей*.

В зависимости от характера и пространственной структуры описываемых систем различаются модели с *распределенными* и *сосредоточенными параметрами*. В связи с различной интенсивностью моделируемых процессов во времени различают: *статические модели*, описывающие установившиеся процессы вблизи состояния равновесия; *стационарные модели*, характеризующие постоянством основных параметров во времени; *динамические модели* систем, в которых входной переменной процесса является время.

В зависимости от конкретного вида применяемого математического аппарата, различают модели матричные, сетевые, дифференциальные, интегральные, алгоритмические, программные и др.

Лекция №21

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ПОТОКОВ. МЕТОД УСТАНОВИВШЕГОСЯ СОСТОЯНИЯ.

План:

1. Метод ступенчатого возмущения.
2. Метод установившегося состояния.

Метод ступенчатого возмущения. При использовании этого метода в поток жидкости, поступающей в аппарат и не содержащей индикатора, вносят некоторое количество индикатора таким образом, что его концентрация во входящем потоке изменяется скачком от нуля до некоторого значения C_0 и в дальнейшем поддерживается на этом уровне.

Кривая отклика, соответствующая сигналу ступенчатой формы, имеет вид, изображенный на рис. 2.4. Если время выражено в безразмерных единицах, то зависимость изменения концентрации индикатора во времени в потоке, выходящем из аппарата, называется F-кривой. Величина, равная отношению $F / F(\infty)$, во входящем потоке изменяется от 0 до 1.

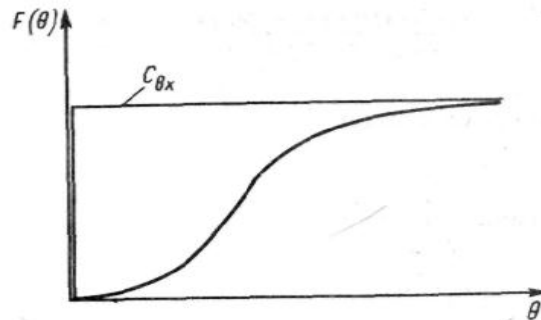


Рис. 2.4. Типичная экспериментальная F - кривая

Доля элементов потока, время пребывания которых в аппарате находится в пределах от θ до $\theta + d\theta$, есть:

$$dF(\theta) = C(\theta)d\theta. \quad (2.15)$$

Доля элементов потока, время пребывания которых в аппарате меньше θ , определяется следующим образом:

$$F(\theta) = \int_0^{\theta} C(\theta)d\theta. \quad (2.16)$$

Так как сумма всех долей жидкости в аппарате равна 1, то площадь под F-кривой равна 1 и $f(\theta) \rightarrow 1$ при $\theta \rightarrow \infty$, т.е.

$$\int_0^1 \theta dF(\theta) = \int_0^{\theta} \theta C(\theta) d\theta = 1. \quad (2.17)$$

Среднее время пребывания потока в аппарате составляет:

$$\bar{t} = \frac{\int_0^{\infty} t C_3(t) dt}{\int_0^{\infty} C_3(t) dt} = \int_0^{\infty} t C_3(t) dt = \int_0^{\infty} t dF - \int_0^{\infty} t d(1-F). \quad (2.18)$$

Для нахождения последнего интеграла в выражении (2.18) воспользуемся интегрированием по частям:

$$\int_0^{\infty} t d(1-F) = t(1-F) - \int_0^{\infty} (1-F) t d. \quad (2.19)$$

Первое слагаемое в уравнении (2.19) равно нулю. Тогда среднее время пребывания потока в аппарате выразится через значения функции распределения элементов потока на выходе из аппарата $F(t) = F_3(t) / F_3(\infty)$ так:

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} (1-F) t d. \quad (2.20)$$

Введя функцию

$$I(t) = 1 - F(t), \quad (2.21)$$

среднее время пребывания можно выразить как

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} I(t) d. \quad (2.22)$$

Геометрически среднее время пребывания соответствует площади над кривой $F(t)$ (рис. 2.5).

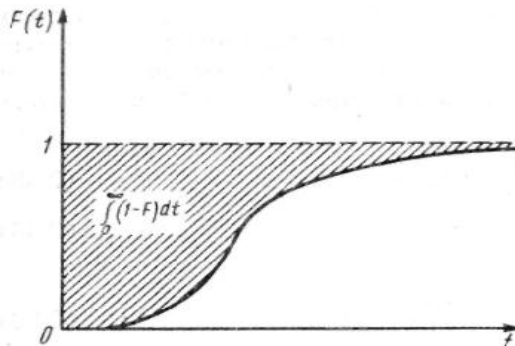


Рис. 2.5. Геометрическая интерпретация среднего времени пребывания

Метод установившегося состояния. При исследовании структуры потоков в аппарате этим методом в поток на выходе из аппарата с постоянной скоростью вводят индикатор и определяют изменение концентрации индикатора в направлении, противоположном движению потока. Частицы индикатора попадают в аппарат вследствие обратного перемешивания потока. Распределение концентрации индикатора по длине аппарата определяют в установившемся режиме.

Рассмотрим пример использования методов установившегося состояния для оценки параметра диффузионной модели — коэффициента продольного перемешивания. D_l Уравнение диффузионной модели записывается в виде

$$\frac{d^2C}{dz^2} - Pe \frac{dC}{dz} = 0, \quad (2.23)$$

где z - безразмерная координата; C - концентрация; Pe - число Пекле. Запишем граничные условия

$$C_{\infty} = 0, \quad C = \frac{1}{Pe} \frac{dC}{dz} \quad \text{при } z = 0; \quad (2.24)$$

$$C = C_k \quad \text{при } z = 1. \quad (2.25)$$

Общее решение уравнения (2.23) имеет вид

$$C = A_1 + A_2 e^{Pe z}, \quad (2.26)$$

откуда получаем

$$\frac{dC}{dz} = A_2 Pe * e^{Pe z} \quad (2.27)$$

Используя граничное условие при $z = 0$, найдем значение A_x :

$$A_1 + A_2 e^0 = \frac{1}{Pe} * A_2 Pe * e^0; A_1 = 0. \quad (2.28)$$

Из условия при $z = 1$ имеем

$$C_k = A_2 e^{Pe}; A_2 = C_k e^{-Pe}. \quad (2.29)$$

Поэтому решение уравнения диффузионной модели в рассматриваемом случае таково:

$$C = C_k e^{Pe(z-1)}. \quad (2.30)$$

Определив концентрацию индикатора в каком-либо сечении аппарата, можно определить Pe и, следовательно, замерив концентрацию в нескольких сечениях аппарата ta , мы получим данные, которые можно использовать для проверки адекватности модели. Если коэффициент продольного перемешивания в потоке постоянен по длине аппарата, то значения Pe , полученные в различных точках, должны совпадать.

Для технологических экспериментов, характерны статистические объекты исследований, в которых имеют место стохастические или корреляционные взаимосвязи между параметрами и факторами. Получить математическую модель технологического процесса - значит найти математическое описание этих взаимосвязей.

В задачу корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализа входит получение на основании экспериментальных данных математической модели процесса и ее анализ. Методы корреляционного и регрессионного анализа применимы только для таких параметров, которые при изучении физической природы объекта являются взаимосвязанными.

На первом этапе обычно оценивают степень тесноты взаимосвязи значений функции отклика с одной или несколькими независимыми переменными. В первом случае используется *коэффициент парной корреляции* r_{yx} , во втором - *коэффициент множественной корреляции* $R_{yx_1x_2\dots x_m}$.

Коэффициент парной корреляции:

$$r_{yx} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{nS_y S_x} \quad (14.1)$$

где n - объем выборки, \bar{y} и \bar{x} - средние арифметические значения y_i и x_i в рассматриваемой выборке, S_y и S_x их средние квадратические отклонения.

Коэффициент множественной корреляции с использованием метода определителей находится по формуле

$$R_{1,2,3,\dots,m} = \sqrt{1 - D/D_{11}} \quad (14.2)$$

где m - число независимых переменных, D - определитель, составленный из всех коэффициентов парной корреляции, D_{11} - определитель, получающийся из D исключением левого столбца и верхней строки.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & \dots & 1 \end{vmatrix}; \quad D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ r_{32} & 1 & \dots & r_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m2} & r_{m3} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Значения r_{yx} (14.1) и $R_{yx_1x_2\dots x_m}$ (14.2) находятся в пределах от -1 до +1.

Если они достоверны, т.е. существенно отличаются от 0, значит между исследуемыми факторами имеется линейная корреляционная зависимость. В противном случае эта зависимость отсутствует, либо является существенно нелинейной. В результате корреляционным анализом подтверждается наличие взаимосвязей между исследуемыми факторами.

На следующем этапе обработки экспериментальных данных с помощью регрессионного анализа выбирают модель, в наилучшей степени описывающую указанные взаимосвязи. Уравнение, по которому могут быть найдены числовые значения выборочных средних функций отклика при соответствующих значениях независимых переменных называется *уравнением регрессии*. В общем случае оно может быть записано в виде

$$\bar{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (14.3)$$

При аппроксимации неизвестных функций отклика (14.3) в математической статистике часто используют полиномиальные модели, а наиболее часто - простейшие из них - квадратичные.

$$\bar{y} = b_0 + \sum_{i=1}^m b_i x_i + \sum_{i,j=1, i \neq j}^m b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^m b_{ii} x_i^2 \quad (14.4)$$

где b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii} – коэффициенты регрессии.

С позиций статистики полиномиальная модель (14.4) удобна тем, что позволяет увеличить степень точности аппроксимации за счет повышения порядка полинома.

При определении параметров уравнения регрессии все переменные и соотношения между ними выгодно выражать в стандартизированном масштабе. Значения переменных в стандартизированном масштабе определяются по формуле:

$$t_{x_i} = \frac{(x_i - \bar{x})}{S_x},$$

где x_i – значения переменных в натуральном масштабе, S_x – их среднеквадратичные отклонения от среднеарифметического значения \bar{x} .

Математические модели связывают входные (независимые) переменные процесса $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемые воздействиями, с выходными (зависимыми) характеристиками $Y(y_1, y_2, \dots, y_m)$ (рис. 3.1), которые обычно именуют откликами, в виде уравнения связи

$$Y=f(X) \quad (3.1)$$

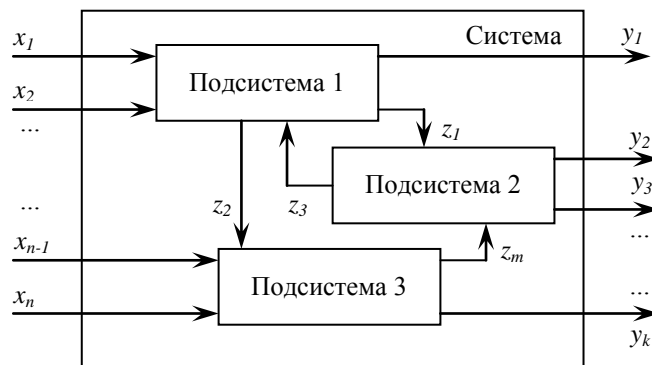


Рис. 3.1. Модель системы детерминированных процессов.

Любому реальному процессу свойственны случайные колебания, вызываемые физической изменчивостью каких-либо факторов $x_i \pm \Delta x_i(\tau)$ или внешними случайными воздействиями. В силу этого при равном среднем значении входных характеристик $X(\tau)$ в моменты τ_1 и τ_2 выходные параметры $Y(\tau)$, будут неодинаковыми (рис.3.2). Поэтому для вероятностных процессов, где по сравнению с $x_i(\tau)$ нельзя пренебречь случайными колебаниями $\Delta x_i(\tau)$ и

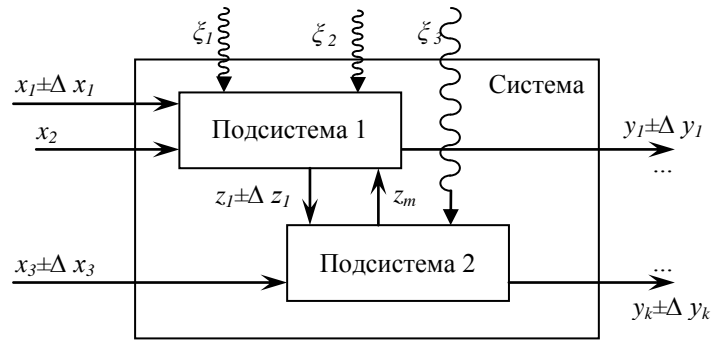


Рис.3.2. Модель системы стохастических процессов

случайными внешними воздействиями $\xi_j(\tau)$, необходимо характеризовать систему с учетом статистического закона распределения мгновенных значений $Y(\tau)$ относительно средней величины $Y_{cp}(\tau)$ уравнением

$$Y(\tau) = Y_{cp}(\tau) \pm \Delta Y(\tau) = f(X_{cp}) + \zeta(\Delta X, \xi) \quad (3.2)$$

Модели, отображающие случайный (стохастический) характер параметров и факторов системы, называются *статистическими* или *стохастическими* в отличие от *детерминированных*, не учитывающих вероятностных характеристик процессов.

По мере уменьшения величины параметров ΔX и ξ уравнение (3.2) приближается по структуре к уравнению (1.1), описывающему детерминированные системы.

Обычно детерминированные модели (3.1), представляющие собой систему уравнений, удастся составить только в тех случаях, когда о процессах в описываемой системе имеются ясные физические представления и эти представления можно формализовать. В таких случаях говорят, что система представляет собой «белый ящик» - объект с известной структурой и функциями.

Однако получаемая таким образом модель может оказаться громоздкой, а ее информационное обеспечение весьма трудоемким. Поэтому часто используют статистические модели для описания детерминированных систем. В таких случаях рассматривают систему как «черный ящик» с неизвестной структурой, в котором доступны для изучения только контролируемые входные параметры X и измеримые выходные характеристики Y . Получив таблицу соответствий $\{x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n\}$, принимают их за случайную выборку из генеральной статистической совокупности $\{X, Y\}$ и описывают соотношением (3.2). Полученная статистическая модель при соответствующей интерпретации результатов позволяет раскрыть механизм, сделать «белыми» некоторые части устройства и функционирования «черного ящика».

Детерминированные модели (3.1), могут также использоваться для описания стохастических систем, если объектом изучения являются их усредненные характеристики. Таким образом, статистические модели являются более широким классом моделей и включают детерминированные модели как предельный частный случай, в котором выходные параметры Y однозначно определяются входными переменными X .

Соотношения (3.1) и (3.2) являются математическими моделями процессов, приближенно описывающими происходящие в системе изменения. Если доказано подобие натуральных и моделирующих процессов, то можно говорить об *адекватности моделей*.

В зависимости от характера и пространственной структуры описываемых систем различаются модели с *распределенными* и *сосредоточенными параметрами*. В связи с различной интенсивностью моделируемых процессов во времени различают: *статические модели*, описывающие установившиеся процессы вблизи состояния равновесия; *стационарные модели*, характеризующие постоянством основных параметров во времени; *динамические модели* систем, в которых входной переменной процесса является время.

В зависимости от конкретного вида применяемого математического аппарата, различают модели матричные, сетевые, дифференциальные, интегральные, алгоритмические, программные и др.

Лекция №22

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ПОТОКОВ. МЕТОД СИНУСОИДАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ.

План:

1. Метод синусоидального возмущения.
2. Метод синусоидального возмущения.

Метод синусоидального возмущения. При наложении синусоидального возмущения на входящий поток получают на выходе функцию отклика, также представляющую собой синусоиду, но имеющую другую амплитуду и сдвинутую по фазе. Синусоидальное возмущение на входе определяется амплитудой A_0 и частотой $\omega = 2\pi/T$ (рад/с), где T - период колебаний. У выходной синусоиды изменяется амплитуда и происходит фазовый сдвиг φ (рис. 2.6).

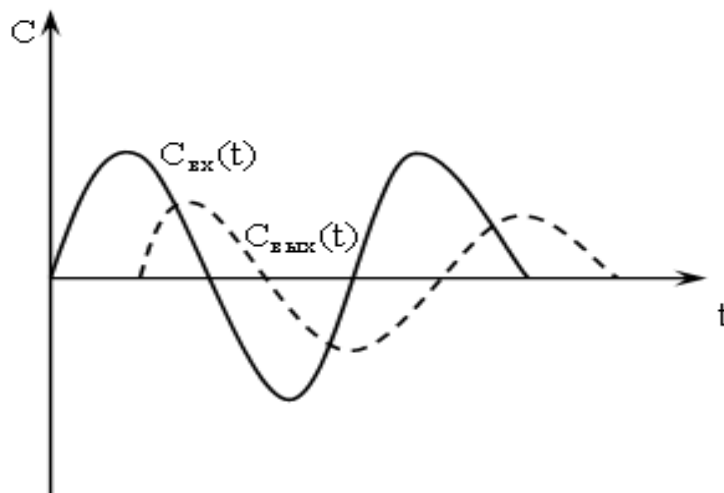


Рис. 2.6. Вид входного и выходного сигналов при синусоидальной подаче трассера.

Величина φ и изменение амплитуды для одного и того же объекта являются функциями частоты возмущающего сигнала. В результате сопоставления входной и выходной синусоид получают амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики (рис. 2.7). Отношение амплитуд называют *коэффициентом усиления* $\Delta(\omega)$.

Рассмотрим определение коэффициента продольного перемешивания D_ℓ диффузионной модели [см. ниже формулу (2,87)] при подаче на вход синусоидального сигнала. Граничные условия выражаются в виде

$$C(t,0) = C_0 A_0 \sin \omega t, \quad (2.31)$$

$$C(t, \infty) = C_0 \quad (2.32)$$

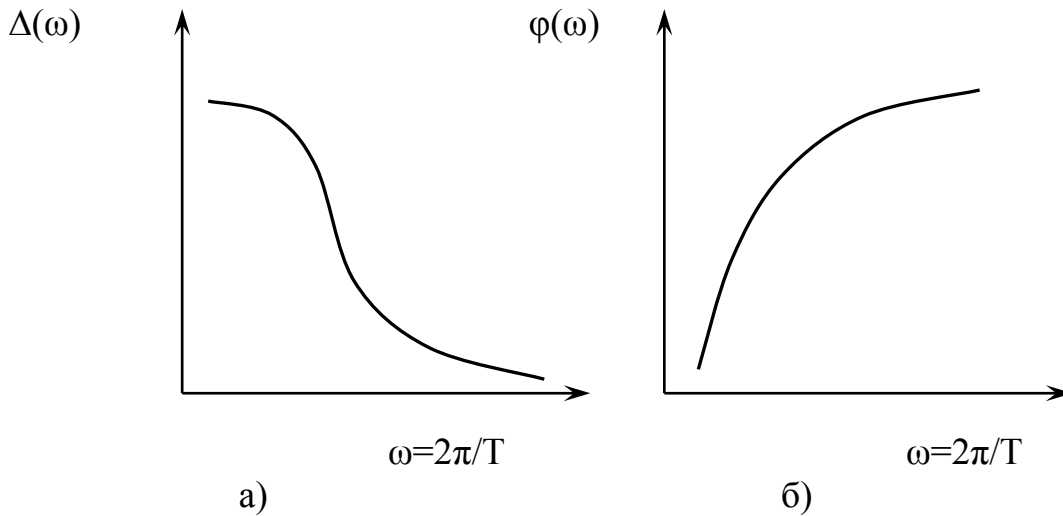


Рис. 2.7. Амплитудно-частотная (а) и фазочастотная (б) характеристики отклика системы

где C_0 - средняя концентрация индикатора; A_0 - амплитуда колебаний при $z = 0$ (на входе в аппарат).

Используя преобразование Лапласа уравнения диффузионной модели и, учитывая граничные условия (2.31), (2.32), можно получить выражение для концентрации индикатора на выходе из аппарата:

$$C(t, l) = C_0 + A_0 e^{-B} \sin(\omega t - \varphi), \quad (2.33)$$

Где

$$B = \ln \frac{A_0}{A_l} = \frac{ul}{2D_l} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{4\omega D_l}{u^2} \right)^2} \cos \left[\frac{\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{4\omega D_l}{u^2} \right)}{2} \right] \right\}^{-1}; \quad (2.34)$$

здесь l — длина аппарата; A_l — амплитуда колебаний на выходе из аппарата.

Разлагая подкоренное выражение и тригонометрическую функцию в ряд и, пренебрегая членами высшего порядка, можно привести уравнение (2.34) к виду

$$B = \frac{l\omega^2 D_l}{u^3} - \frac{5l\omega^2 D_l^3}{u^7}. \quad (2.35)$$

Пренебрегая вторым членом уравнения (2.35), получаем

$$B = \ln \frac{A_0}{A_t} = \frac{l\omega^2 D_l}{u^3} \quad . \quad (2.36)$$

Уравнение, определяющее сдвиг фаз, имеет вид

$$\varphi = \frac{ul}{2D_l} \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{2D_l\omega}{u^2}\right)^2} - \frac{1}{2} \quad . \quad (2.37)$$

После разложения в ряд и отбрасывания членов высшего порядка последнее уравнение упрощается:

$$\varphi = \frac{\omega L}{u} \quad . \quad (2.38)$$

Теперь по экспериментальным значениям сдвига фаз f и отношения амплитуд A_0/A_t нетрудно по уравнениям (2.36), (2.37) оценить величину коэффициента продольного перемешивания D_l .

Статистическое уравнение адекватно описывает результаты опытов, если квадратическое отклонение от экспериментальных данных y_i значений зависимой переменной y_{pi} , рассчитанной по уравнению регрессии, обусловлено только ошибкой воспроизведения (т.е. случайным характером этого параметра).

Применение корреляционного и регрессионного анализа правомерно и эффективно при соблюдении ряда условий.

1. Параметр оптимизации y - случайная величина с нормальным законом распределения.

2. Дисперсия S_y^2 не зависит от абсолютных значений величины y и остается постоянной и однородной при различных наблюдениях y .

3. Значения независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_m изменяются с пренебрежимо малыми ошибками по сравнению с ошибкой в определении y .

4. Переменные x_1, x_2, \dots, x_m линейно независимы.

5. Процесс изменения зависимой переменной y является стационарным и случайным.

6. Экспериментальные данные получены из ряда независимых испытаний и образуют случайную выборку из данной генеральной совокупности.

Рассмотрим проверку выполнения этих условий.

1. Соответствие y нормальному закону распределения устанавливается либо по большим выборкам с помощью критериев Пирсона или Колмогорова, либо на основании анализа природы величины y .

2. Для оценки однородности дисперсии S_y^2 проводят параллельные опыты в различных точках матрицы плана (т.е. при различных значениях x_1, x_2, \dots, x_m)

Если сравниваются два значения $S_{y_1}^2$ и $S_{y_2}^2$ при различных числах степеней их свободы f ($f=N-1$, N - число параллельных опытов или объем выборки) то используется критерий Фишера, рассчитываемый как отношение большей дисперсии к меньшей

$$F_p = \frac{S_{y_1}^2}{S_{y_2}^2}, \text{ где } S_{y_1}^2 > S_{y_2}^2, \quad (15.1)$$

Если наблюдаемое значение F_p (15.1) меньше критического $F_{кр}$ для соответствующих чисел степеней свободы и принятого уровня значимости, то опыты считаются воспроизводимыми, а дисперсии однородными.

Однородность ряда дисперсий при одинаковом числе опытов (для определения каждой из них) оценивают с помощью критерия Кохрена - отношения максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий ряда:

$$G_p = \frac{S_{y_{\max}}^2}{(S_{y_1}^2 + S_{y_2}^2 + \dots + S_{y_N}^2)} = \frac{S_{y_{\max}}^2}{\sum_{j=1}^N S_{y_j}^2}, \quad (15.2)$$

где N -число параллельных опытов или различных выборок. Дисперсии однородны, если расчетное значение G_p (15.2), не превышает критического $G_{кр}$.

При неравном числе степеней свободы для каждой из дисперсий ряда их однородность проверяют с помощью критерия Бартлета. Вначале определяют средневзвешенную дисперсию

$$S_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^N f_j S_{y_j}^2}{\sum_{j=1}^N f_j}, \quad (15.3)$$

а затем вычисляют

$$B = 2,303 \left[\lg S_y^2 \sum_{j=1}^N f_j - \sum_{j=1}^N (f_j \lg S_{y_j}^2) \right];$$

$$C = 1 + \frac{\left[\sum_{j=1}^N \frac{1}{f_j} - \frac{1}{\sum_{j=1}^N f_j} \right]}{3(N-1)};$$

где $f_j=n_j-1$, n_j - объем j -й выборки. В случае, когда все $S_{y_j}^2$ соответствуют одной генеральной дисперсии, отношение B/C распределено аналогично критерию Пирсона χ^2 с $N-1$ степенями свободы. Это значит, что при $B/C \leq \chi_{1-p}^2$, данном числе степеней свободы $N-1$ и заданном уровне значимости p дисперсии однородны.

3. Воспроизводимость опытов и однородность дисперсий достигается, когда выявлены и устранены источники нестабильности эксперимента, а также с помощью более точных средств и методов измерений.

Проверку достаточной точности измерения значений независимых переменных можно произвести, сопоставив ее с диапазоном изменения последних. Считается, что ошибки определения независимых переменных не должны превышать 5...7% интервала их варьирования. Ошибки в определении значений зависимой переменной не влияют столь значительно на точность регрессионного анализа и могут составить до 30% интервала варьирования.

4. Отсутствие коррелированности независимых переменных проверяется расчетом парных коэффициентов корреляции между ними.

5. Случайные процессы называют стационарными в том случае, когда основные характеристики процесса (математическое ожидание, дисперсия и др.) постоянны или однородны во времени. Поскольку при пассивном эксперименте свойства процесса определяются по одной представительной выборке, распространять полученные результаты на весь процесс можно лишь при условии его стационарности.

Проверка стационарности процесса производится в следующем порядке.

По результатам измерения параметра строится случайная последовательность его значений, соответствующая порядку проведения измерений. Полученную реализацию разбивают на несколько (5...10) равных отрезков, для каждого отрезка устанавливают дисперсию $S_{y_j}^2$ и с помощью критерия Кохрена (15.2) определяют являются ли значения $S_{y_j}^2$ на каждом из отрезков оценками одной и той же генеральной дисперсии σ^2 .

Затем на каждом отрезке проводится сравнение среднеарифметических $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N$, соответствующих выборочным дисперсиям $S_1^2, S_2^2, \dots, S_N^2$, числам степеней свободы f_1, f_2, \dots, f_N ($f_j = n_j - 1$, где n_j - объем соответствующей выборки). Всем выборкам соответствует генеральная дисперсия σ^2 , в качестве оценки которой, можно взять средневзвешенную дисперсию S_y^2 (15.3).

Чтобы гипотеза о равенстве всех генеральных средних была справедлива, должно соблюдаться условие:

$$\frac{\bar{S}_y^2}{S_y^2} \leq F_{1-p(N-1, f)}, \text{ в котором } \bar{S}_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^N n_j (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2}{N-1},$$

где $F_{1-p(N-1, f)}$ - табличное значение критерия Фишера, $\bar{\bar{y}}$ - общее среднее всех элементов, отрезков, при объединении их в одну выборку

6. Проверку гипотезы о случайности выборки, необходимую при пассивном эксперименте, можно произвести методом последовательных разностей.

По значениям x_i выборки, расположенным в последовательности их наблюдения (x_1, x_2, \dots, x_n) , образуется $n-1$ разностей между соседними членами: $a_1 = x_2 - x_1, a_2 = x_3 - x_2, \dots, a_{n-1} = x_n - x_{n-1}$.

Для оценки случайности выборки используется критерий $\tau = c^2/s^2$, в котором:

$$c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{2(n-1)}; \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Если $\tau < \tau_q$, где τ_q - критическое значение при уровне значимости q , то гипотеза о случайности выборки верна.

Математические модели связывают входные (независимые) переменные процесса $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемые воздействиями, с выходными (зависимыми) характеристиками $Y(y_1, y_2, \dots, y_m)$ (рис. 3.1), которые обычно именуют откликами, в виде уравнения связи

$$Y = f(X) \quad (3.1)$$

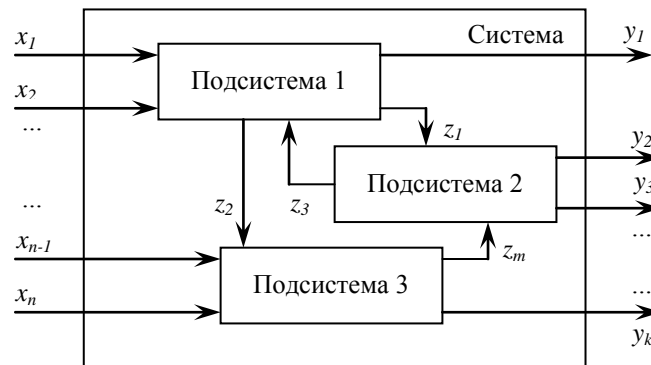


Рис. 3.1. Модель системы детерминированных процессов.

Любому реальному процессу свойственны случайные колебания,

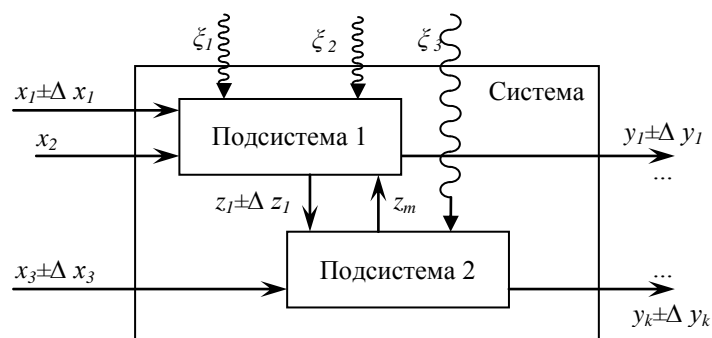


Рис.3.2. Модель системы стохастических процессов

вызываемые физической изменчивостью каких-либо факторов $x_i \pm \Delta x_i(\tau)$ или внешними случайными воздействиями. В силу этого при равном среднем значении входных характеристик $X(\tau)$ в моменты τ_1 и τ_2 выходные параметры $Y(\tau)$, будут неодинаковыми (рис.3.2). Поэтому для вероятностных процессов, где по сравнению с $x_i(\tau)$ нельзя пренебречь случайными колебаниями $\Delta x_i(\tau)$ и случайными внешними воздействиями $\xi_j(\tau)$, необходимо характеризовать систему с учетом статистического закона распределения мгновенных значений $Y(\tau)$ относительно средней величины $Y_{cp}(\tau)$ уравнением

$$Y(\tau) = Y_{cp}(\tau) \pm \Delta Y(\tau) = f(X_{cp}) + \zeta(\Delta X, \xi) \quad (3.2)$$

Модели, отображающие случайный (стохастический) характер параметров и факторов системы, называются *статистическими* или *стохастическими* в отличие от *детерминированных*, не учитывающих вероятностных характеристик процессов.

По мере уменьшения величины параметров ΔX и ξ уравнение (3.2) приближается по структуре к уравнению (1.1), описывающему детерминированные системы.

Обычно детерминированные модели (3.1), представляющие собой систему уравнений, удастся составить только в тех случаях, когда о процессах в описываемой системе имеются ясные физические представления и эти представления можно формализовать. В таких случаях говорят, что система представляет собой «белый ящик» - объект с известной структурой и функциями.

Однако получаемая таким образом модель может оказаться громоздкой, а ее информационное обеспечение весьма трудоемким. Поэтому часто используют статистические модели для описания детерминированных систем. В таких случаях рассматривают систему как «черный ящик» с неизвестной структурой, в котором доступны для изучения только контролируемые входные параметры X и измеримые выходные характеристики Y . Получив таблицу соответствий $\{x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n\}$, принимают их за случайную выборку из генеральной статистической совокупности $\{X, Y\}$ и описывают соотношением (3.2). Полученная статистическая модель при соответствующей интерпретации результатов позволяет раскрыть механизм, сделать «белыми» некоторые части устройства и функционирования «черного ящика».

Детерминированные модели (3.1), могут также использоваться для описания стохастических систем, если объектом изучения являются их усредненные характеристики. Таким образом, статистические модели являются более широким классом моделей и включают детерминированные модели как предельный частный случай, в котором выходные параметры Y однозначно определяются входными переменными X .

Соотношения (3.1) и (3.2) являются математическими моделями процессов, приближенно описывающими происходящие в системе изменения. Если доказано подобие натуральных и моделирующих процессов, то можно говорить об *адекватности моделей*.

В зависимости от характера и пространственной структуры описываемых систем различаются модели с *распределенными* и *сосредоточенными параметрами*. В связи с различной интенсивностью моделируемых процессов во времени различают: *статические модели*, описывающие установившиеся процессы вблизи состояния равновесия; *стационарные модели*, характеризующие постоянством основных параметров во времени; *динамические модели* систем, в которых входной переменной процесса является время.

В зависимости от конкретного вида применяемого математического аппарата, различают модели матричные, сетевые, дифференциальные, интегральные, алгоритмические, программные и др.

Лекция №23

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОГО, РЕГРЕССИОННОГО И ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА.

Поскольку результаты корреляционно-регрессионного анализа, полученные на базе ограниченного числа экспериментальных данных, являются случайными величинами, необходимо оценить их достоверность, определить доверительные интервалы, в которых находятся их истинные значения.

Для этого производится комплекс операций.

1. Оценка достоверности коэффициентов корреляции.
2. Оценка значимости коэффициентов регрессии.
3. Оценка адекватности уравнения регрессии.

Рассмотрим последовательность проведения операций.

1. При любом объеме выборки и многомерном нормальном распределении рассматриваемых факторов вычисляется статистика имеющая распределение Стьюдента с $f=n-2$ степенями свободы.

$$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}, \quad (16.1)$$

где r - коэффициент корреляции.

Для проверки нулевой гипотезы H_0 (согласно которой коэффициент корреляции генеральной совокупности равен нулю) находят по таблицам, при фиксированном уровне значимости α и числе степеней свободы $f=n-2$, критическое значение $t_{\alpha/2, n-2}$, удовлетворяющее условию

$$P(|t| \geq t_{\alpha/2, n-2}) = \alpha$$

Если наблюдаемое значение $t_H \geq t_{\alpha/2, n-2}$, то нулевую гипотезу об отсутствии линейной зависимости между переменными x и y следует отвергнуть. Такой метод часто применяют при малом объеме выборок.

При числе наблюдений $n > 50$ надежность коэффициента корреляции можно оценить по его среднему квадратическому отклонению

$$S_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} \quad (16.2)$$

и нормированному отклонению

$$t_r = \frac{|r|}{S_r} \quad (16.3)$$

Достоверность коэффициента корреляции считается доказанной с вероятностью 0,997, если $t_r \geq 3$, с вероятностью 0,990 при $t_r \geq 2,58$; с вероятностью 0,95 при $t_r \geq 1,96$. Если n достаточно велико, а r близко к 0,5, то границы доверительного интервала для коэффициента корреляции генеральной совокупности ρ

$$r - t_{кр} S_r \leq \rho \leq r + t_{кр} S_r \quad (16.4)$$

Значение $t_{кр}$ устанавливается по таблице функции Лапласа для выбранной вероятности. Если левая и правая части неравенства имеют одинаковый знак, то r имеет достоверный знак и является значимым.

Соотношения (16.1)-(16.4) справедливы и при оценке достоверности коэффициента множественной корреляции и корреляционных отношений.

2. Проверку значимости коэффициентов регрессии можно производить двумя способами: сравнением абсолютного значения коэффициента с доверительным интервалом и с помощью t -критерия Стьюдента.

В первом случае доверительный интервал для коэффициента b_i вычисляют по формуле

$$\Delta b_i = \pm t_T S_{b_i}$$

где t_T - табличное значение критерия Стьюдента при уровне значимости и числе степеней свободы, для которых определялось S_{b_i} , S_{b_i} - среднеквадратичное отклонение b_i . Коэффициент значим, если его абсолютное значение больше доверительно интервала.

При проверке значимости коэффициентов вторым способом вычисляют

$$t_p = \frac{|b_i|}{S_{b_i}},$$

и сравнивают его с критическим значением этого критерия $t_{кр}$. Коэффициент значим, если $t_p > t_{кр}$ для принятого уровня значимости и числа степеней свободы, при которых определялось S_{b_i} .

Методика определения S_{b_i} зависит от способа получения уравнения регрессии. В случае применения планирования эксперимента:

$$S_{b_i}^2 = \frac{S^2(y)}{nN},$$

где $S^2(y)$ - дисперсия воспроизводимости эксперимента, n - число параллельных опытов в каждой точке матрицы при равномерном дублировании опытов (при отсутствии дублирования $n=1$), N - общее число опытов в матрице плана.

При равномерном дублировании опытов во всех строках матрицы плана число параллельных опытов одинаково. Для каждой строки этой матрицы вычисляют дисперсию S_j результатов по данным n параллельных опытов

$$S_j^2 = \frac{\sum_{u=1}^n (y_{ju} - \bar{y}_j)^2}{n-1},$$

где y_{ju} - значение функции отклика в j -й строке для u -ого опыта.

Если S_j^2 результатов опытов однородны, то дисперсия $S^2(y)$ воспроизводимости эксперимента

$$S^2(y) = \frac{\sum_{j=1}^N S_j^2}{N}, \quad (16.5)$$

где N -число опытов или число строк матрицы плана.

При отсутствии дублирования опытов для определения дисперсии воспроизводимости эксперимента выполняют n_0 параллельных опытов при средних уровнях всех независимых факторов. По результатам этих опытов вычисляют

$$S^2(y) = \frac{\sum_{u=1}^{n_0} (y_u - \bar{y})^2}{n_0 - 1}, \quad (16.6)$$

где y_u – значение функции отклика в u -ом параллельном опыте.

При равномерном дублировании опытов число степеней свободы для расчета $S^2(y)$ и, следовательно S_{b_i} находится как $f=N(n-1)$, при отсутствии дублирования опытов $f=n_0-1$.

3. В зависимости о наличии сведений о дисперсии воспроизводимости эксперимента $S^2(y)$ проверку адекватности уравнения регрессии можно производить по двум схемам.

Схема I, состоящая из трех этапов применяется при отсутствии оценки дисперсии воспроизводимости, что характерно для пассивного эксперимента.

А) Вычисляется дисперсия относительно среднего значения параметра оптимизации:

$$S_{y_0}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N-1}.$$

Б) Рассчитывается дисперсия, характеризующая отклонение экспериментальных значений величин от найденных по уравнению регрессии.

Если порядок уравнения заранее неизвестен, то в случае многофакторного пространства имеет смысл начинать с уравнения первого порядка.

$$S_{y_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{f}, \quad (16.7)$$

где \hat{y}_i - значение параметра оптимизации, вычисленное по уравнению регрессии для условий i -го опыта; $f=N-g$ - число степеней свободы, g - число коэффициентов регрессии.

В) Вычисляется опытное значение отношения дисперсий

$$F_0 = S_{y_0}^2 / S_{y_1}^2,$$

которое затем сравнивают с критическим $F_{кр}(f_1, f_2)$. Если $F_0 \leq F_{кр}$, пользоваться уравнением регрессии первого порядка не имеет смысла, так как в изученном интервале изменения уровней факторов оно описывает исследуемую систему не лучше, чем уравнение нулевого порядка. Затем составляют уравнение второго порядка, рассчитывают $S_{y_2}^2$ и $F_1 = S_{y_2}^2 / S_{y_1}^2$. Далее проверяют значимость этого отношения по критерию Фишера. Процедуру повторяют до тех пор, пока не будет выполнено условие $F_r \geq F_{кр}(f_r, f_{r+1})$.

Схема II применяется, если известна дисперсия воспроизводимости $S^2(y)$ эксперимента.

Для оценки адекватности модели, вначале рассчитывают дисперсию адекватности $S_{ад}^2$ по формуле (16.7), а затем вычисляют опытное значение критерия Фишера.

$$F_p = S_{ад}^2 / S^2(y).$$

Если $F_p < F_{кр}(f_r, f_{r+1})$, модель считают адекватной. Значение $S^2(y)$ определяют в зависимости от характера дублирования опытов по формулам (16.5) и (16.6).

Лекция №24

УСЛОВИЕ ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.

При отборе факторов предназначенных для включения в статистическую модель, принимается во внимание, что они должны быть управляемыми по величине и измеримыми с необходимой точностью Факторы должны быть

взаимно не коррелированы и однозначно связаны с выходными параметрами.

Отбор некоторого числа (3...7) наиболее существенных факторов производится путем построения диаграммы ранжирования, т.е. расположения всех изучаемых факторов в порядке убывания силы их влияния на выходной параметр. Для построения такой диаграммы используются методы априорного ранжирования и случайного баланса.

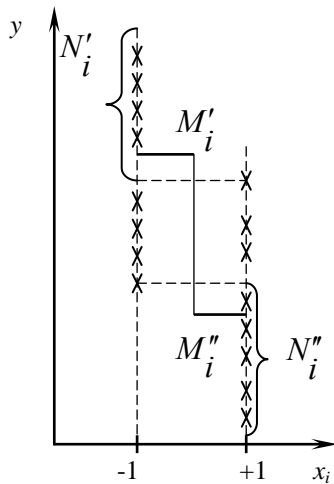


Рис.17.1 Построение диаграммы рассеяния значений y для ранжирования факторов x с помощью медиан M_i

Априорное или доопытное ранжирование

выполняется в форме опроса группы экспертов, которым предлагается расположить рассматриваемые факторы по степени их значимости. При этом каждому порядковому месту в ряду значимости приписывают ранг, например, равный номеру этого места.

Диаграмма ранжирования может быть построена по сумме рангов, если согласие между экспертами подтверждается статистически значимым по χ^2 - критерию коэффициентом конкордации

$$W = \frac{\left(\sum_{j=1}^l R_j \right)_{cp} \sum_{i=1}^k \Delta_j^2}{l^2 (k^3 - 1)}, \quad (17.1)$$

где $\left(\sum_{j=1}^l R_j \right)_{cp}$ - средняя сумма рангов R_j для всех факторов, Δ_j - отклонение суммы рангов для j -ого эксперта от средней суммы рангов, l - число экспертов,

k - число ранжируемых факторов. Чем выше значение W (17.1), тем сильнее согласованность мнений экспертов и выше достоверность полученной ранжировки.

Метод случайного баланса используется для экспериментального отсеивания факторов по данным небольшой серии опытов со случайным выбором наибольшего или наименьшего значения исследуемых факторов в каждом опыте. Для удобства записи плана эксперимента вводят нормированное обозначение величины фактора (-1;0;+1).

Результаты опытов используют для построения диаграммы рассеяния (рис.17.1) откладывая для каждого фактора отдельно по ординате значения y в тех опытах, когда фактор x был на нижнем уровне (-1) и на верхнем уровне (+1) при любых значениях остальных факторов.

Произведение разности медиан $\Delta M = M_i'' - M_i'$ полученных двух групп точек на количество выделяющихся точек $\Delta N = N_i'' + N_i'$, расположенных ниже нижней и выше верхней точек другого уровня, является мерой влияния фактора x_i на y . Величина ранга $R = \Delta N \Delta M$ служит для ранжирования факторов.

Математические модели связывают входные (независимые) переменные процесса $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемые воздействиями, с выходными (зависимыми) характеристиками $Y(y_1, y_2, \dots, y_m)$ (рис. 3.1), которые обычно именуют откликами, в виде уравнения связи

$$Y = f(X) \quad (3.1)$$

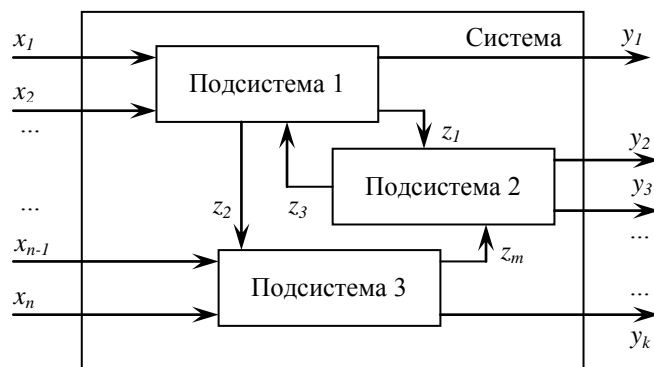


Рис. 3.1. Модель системы детерминированных процессов.

Любому реальному процессу свойственны случайные колебания, вызываемые физической изменчивостью каких-либо факторов $x_i \pm \Delta x_i(\tau)$ или внешними случайными воздействиями. В силу этого при равном среднем значении входных характеристик $X(\tau)$ в моменты τ_1 и τ_2 выходные параметры $Y(\tau)$, будут неодинаковыми (рис.3.2). Поэтому для вероятностных процессов, где по сравнению с $x_i(\tau)$ нельзя пренебречь случайными колебаниями $\Delta x_i(\tau)$ и

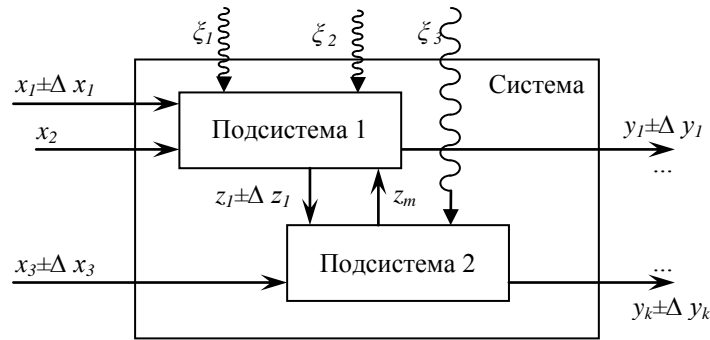


Рис.3.2. Модель системы стохастических процессов

случайными внешними воздействиями $\xi_j(\tau)$, необходимо характеризовать систему с учетом статистического закона распределения мгновенных значений $Y(\tau)$ относительно средней величины $Y_{cp}(\tau)$ уравнением

$$Y(\tau) = Y_{cp}(\tau) \pm \Delta Y(\tau) = f(X_{cp}) + \zeta(\Delta X, \xi) \quad (3.2)$$

Модели, отображающие случайный (стохастический) характер параметров и факторов системы, называются *статистическими* или *стохастическими* в отличие от *детерминированных*, не учитывающих вероятностных характеристик процессов.

По мере уменьшения величины параметров ΔX и ξ уравнение (3.2) приближается по структуре к уравнению (1.1), описывающему детерминированные системы.

Обычно детерминированные модели (3.1), представляющие собой систему уравнений, удастся составить только в тех случаях, когда о процессах в описываемой системе имеются ясные физические представления и эти представления можно формализовать. В таких случаях говорят, что система представляет собой «белый ящик» - объект с известной структурой и функциями.

Однако получаемая таким образом модель может оказаться громоздкой, а ее информационное обеспечение весьма трудоемким. Поэтому часто используют статистические модели для описания детерминированных систем. В таких случаях рассматривают систему как «черный ящик» с неизвестной структурой, в котором доступны для изучения только контролируемые входные параметры X и измеримые выходные характеристики Y . Получив таблицу соответствий $\{x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n\}$, принимают их за случайную выборку из генеральной статистической совокупности $\{X, Y\}$ и описывают соотношением (3.2). Полученная статистическая модель при соответствующей интерпретации результатов позволяет раскрыть механизм, сделать «белыми» некоторые части устройства и функционирования «черного ящика».

Детерминированные модели (3.1), могут также использоваться для описания стохастических систем, если объектом изучения являются их усредненные характеристики. Таким образом, статистические модели являются более широким классом моделей и включают детерминированные модели как предельный частный случай, в котором выходные параметры Y однозначно определяются входными переменными X .

Соотношения (3.1) и (3.2) являются математическими моделями процессов, приближенно описывающими происходящие в системе изменения. Если доказано подобие натуральных и моделирующих процессов, то можно говорить об *адекватности моделей*.

В зависимости от характера и пространственной структуры описываемых систем различаются модели с *распределенными* и *сосредоточенными параметрами*. В связи с различной интенсивностью моделируемых процессов во времени различают: *статические модели*, описывающие установившиеся процессы вблизи состояния равновесия; *стационарные модели*, характеризующие постоянством основных параметров во времени; *динамические модели* систем, в которых входной переменной процесса является время.

В зависимости от конкретного вида применяемого математического аппарата, различают модели матричные, сетевые, дифференциальные, интегральные, алгоритмические, программные и др.

Лекция №25

ОЦЕНКА НАДЁЖНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ АНАЛИЗА.

Параметром y статистической модели может быть только такая выходная переменная, которая поддается измерению с достаточной точностью и однозначно зависит от исследуемых факторов, являясь чувствительной к их изменениям. Важно, чтобы число параметров было минимальным, а в случае построения оптимизационной модели надо свести задачу к однопараметрической. Однако в большинстве случаев исследуемый процесс характеризуется целым набором разноплановых выходных параметров.

Для отбора наиболее важных параметров может быть использовано априорное ранжирование, а также анализ взаимной корреляции между параметрами с целью выявления сильно коррелированных параметров, не являющихся независимыми и не дающих дополнительной информации.

Обобщенным параметром оптимизации Y называют параметр сформированный на основе группы частных параметров y_1, y_2, \dots, y_m . Для его получения используют неравноценные по трудоемкости и эффективности приемы.

Линейная «свертка» параметров проводится с помощью весовых коэффициентов μ_i , величина которых задается с учетом значимости вклада каждого частного параметра

$$Y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_m y_m. \quad (18.1)$$

Если значения y_1, y_2, \dots, y_m приведены к относительным единицам измерения, тогда $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m = 1$. Если по каждому из частных параметров ввести норматив y^* , тогда коэффициенты μ_i целесообразно задать с таким учетом, чтобы они давали наибольший вес параметру, для которого экспериментально достигнуто наилучшее приближение к нормативу. В этом случае оптимизация процесса по формуле (18.1) будет происходить преимущественно в направлении улучшения параметров, наиболее далеких от заданного норматива.

Ранжирование частных параметров осуществляется по номеру занимаемого места с введением обобщенного рангового параметра

$$Y' = \sum_{i=1}^m R_i, \quad (18.2)$$

\или

$$Y'' = \sqrt[m]{R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_m}. \quad (18.3)$$

В случае одинаковой величины параметрам присваиваются дробные значения рангов, при которых сохраняется их общая сумма.

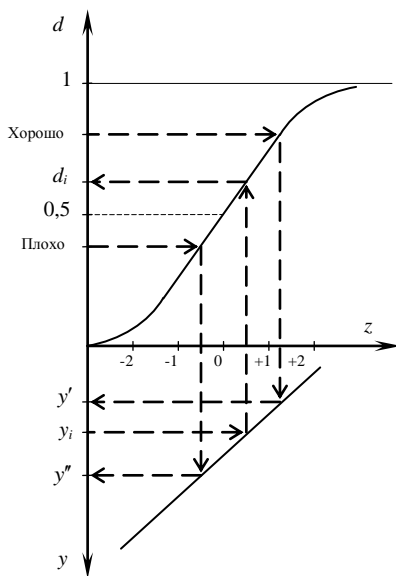


Рис.18.1. Нормирование параметра y_i с помощью функции желательности d_i

Функция желательности d позволяет нормировать частные значения параметров y_i и пересчитать их в значения желательности d_i , из которых формируется обобщенная функция желательности

$$D = \sqrt[m]{d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_m}, \quad (18.4)$$

выступающая в качестве параметра оптимизации.

Шкала желательности задается в пределах от 0 до 1 оценками «Очень хорошо» (1,00-0,80), «Хорошо» (0,80-

0,63), «Удовлетворительно» (0,63-0,37), «Плохо» (0,37-0,20) и «Очень плохо» (0,20-0) (рис.18.1).

Определив, что такое «Хорошо» (y') и что такое «Плохо» (y'') для частного параметра, графически преобразуют значения y_i в d_i (рис.18.1) с использованием нормирующей функции

$$d = \exp(-\exp(-z)), \quad (18.5)$$

где z - кодированная шкала, пропорциональная натуральным значениям параметров.

Значения d_i (18.5) используют для расчета и поиска максимума D (18.4), аналогично рангам R_i при оптимизации параметра Y' (18.2) или Y'' (18.3).

Математические модели связывают входные (независимые) переменные процесса $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемые воздействиями, с выходными (зависимыми) характеристиками $Y(y_1, y_2, \dots, y_m)$ (рис. 3.1), которые обычно именуют откликами, в виде уравнения связи

$$Y=f(X) \quad (3.1)$$

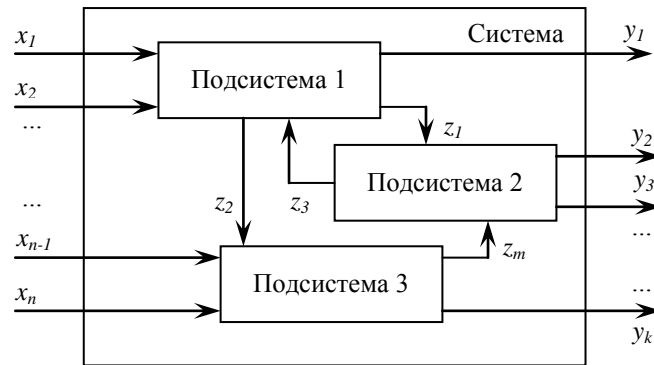


Рис. 3.1. Модель системы детерминированных процессов.

Любому реальному процессу свойственны случайные колебания, вызываемые физической изменчивостью каких-либо факторов $x_i \pm \Delta x_i(\tau)$ или внешними случайными воздействиями. В силу этого при равном среднем значении входных характеристик $X(\tau)$ в моменты τ_1 и τ_2 выходные параметры $Y(\tau)$, будут неодинаковыми (рис.3.2). Поэтому для вероятностных процессов, где по сравнению с $x_i(\tau)$ нельзя пренебречь случайными колебаниями $\Delta x_i(\tau)$ и

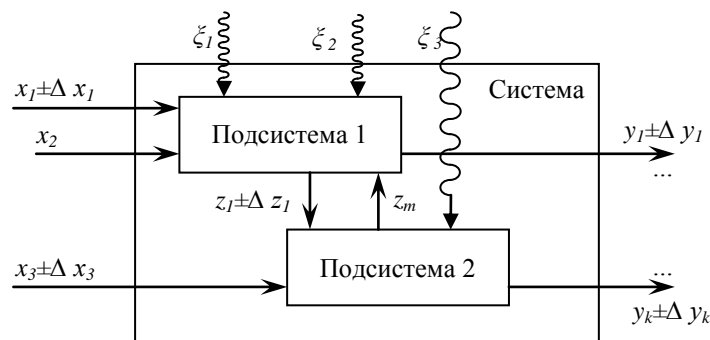


Рис.3.2. Модель системы стохастических процессов

случайными внешними воздействиями $\xi_j(\tau)$, необходимо характеризовать систему с учетом статистического закона распределения мгновенных значений $Y(\tau)$ относительно средней величины $Y_{cp}(\tau)$ уравнением

$$Y(\tau) = Y_{cp}(\tau) \pm \Delta Y(\tau) = f(X_{cp}) + \zeta(\Delta X, \xi) \quad (3.2)$$

Модели, отображающие случайный (стохастический) характер параметров и факторов системы, называются *статистическими* или *стохастическими* в отличие от *детерминированных*, не учитывающих вероятностных характеристик процессов.

По мере уменьшения величины параметров ΔX и ξ уравнение (3.2) приближается по структуре к уравнению (1.1), описывающему детерминированные системы.

Обычно детерминированные модели (3.1), представляющие собой систему уравнений, удается составить только в тех случаях, когда о процессах в описываемой системе имеются ясные физические представления и эти представления можно формализовать. В таких случаях говорят, что система представляет собой «белый ящик» - объект с известной структурой и функциями.

Однако получаемая таким образом модель может оказаться громоздкой, а ее информационное обеспечение весьма трудоемким. Поэтому часто используют статистические модели для описания детерминированных систем. В таких случаях рассматривают систему как «черный ящик» с неизвестной структурой, в котором доступны для изучения только контролируемые входные параметры X и измеримые выходные характеристики Y . Получив таблицу соответствий $\{x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n\}$, принимают их за случайную выборку из генеральной статистической совокупности $\{X, Y\}$ и описывают соотношением (3.2). Полученная статистическая модель при соответствующей интерпретации результатов позволяет раскрыть механизм, сделать «белыми» некоторые части устройства и функционирования «черного ящика».

Детерминированные модели (3.1), могут также использоваться для описания стохастических систем, если объектом изучения являются их усредненные характеристики. Таким образом, статистические модели являются более широким классом моделей и включают детерминированные модели как предельный частный случай, в котором выходные параметры Y однозначно определяются входными переменными X .

Соотношения (3.1) и (3.2) являются математическими моделями процессов, приближенно описывающими происходящие в системе изменения.

Если доказано подобие натуральных и моделирующих процессов, то можно говорить об *адекватности моделей*.

В зависимости от характера и пространственной структуры описываемых систем различаются модели с *распределенными* и *сосредоточенными параметрами*. В связи с различной интенсивностью моделируемых процессов во времени различают: *статические модели*, описывающие установившиеся процессы вблизи состояния равновесия; *стационарные модели*, характеризующие постоянством основных параметров во времени; *динамические модели* систем, в которых входной переменной процесса является время.

В зависимости от конкретного вида применяемого математического аппарата, различают модели матричные, сетевые, дифференциальные, интегральные, алгоритмические, программные и др.

Лекция №26

ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛЕЙ.

Адекватностью называют соответствие математической модели процесса экспериментальным данным. Проверка адекватности аналитической модели состоит в поиске ответа на вопрос о том, соответствует ли натурным данным полученные теоретические зависимости.

Для однозначного ответа на вопрос об адекватности детерминированной модели применительно к стохастическим переменным системы целесообразно воспользоваться процедурой корреляционного анализа, вычислив значения коэффициента линейной корреляции между переменными y и x :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (19.1)$$

где x_i и y_i - пара соответствующих значений x и y в каждой i -той опытной точке, \bar{x} и \bar{y} - средние значения x и y .

Адекватность модели обеспечивает статистически значимая линейная корреляция с уровнем значимости α (обычно берут $\alpha \geq 0,95$). Если $r > r_{кр}(\alpha, n)$, в котором критическое значение $r_{кр}$ зависит от принятого уровня значимости α и числа опытных точек n , то модель адекватна.

Для программных моделей проверка адекватности является этапом более сложным, чем для теоретических моделей, так как коэффициент корреляции (19.1) может быть использован ограниченно лишь для тех стадий процесса, которые приближенно описываются полученными для упрощенных условий аналитическими моделями.

В общем случае проверка адекватности для программных моделей состоит в сопоставлении расчетных y_p и экспериментальных y_e значений, и

оценке величины коэффициентов парной корреляции $r_{y_p y_\varepsilon}$ по формуле (19.1) и коэффициента линейной регрессии:

$$b = r_{y_p y_\varepsilon} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_p - \bar{y}_p)^2}{\sum_{i=1}^n (y_\varepsilon - \bar{y}_\varepsilon)^2}} \quad (19.2)$$

где y_p и y_ε - пары соответственных значений расчетных и экспериментальных данных; \bar{y}_p и \bar{y}_ε - средние значения y_p и y_ε по совокупности всех n сопоставляемых величин.

Когда $r < r_{кр}$, модель неадекватна, в связи с чем следует пересмотреть начальные этапы построения модели и внести в них необходимые корректировки.

Если $r > r_{кр}$, $b \approx 1$ (19.2), то можно сделать вывод об адекватности модели. Если при $r > r_{кр}$, $b < 1$ можно говорить о принципиальной адекватности полученной модели на основе тесной зависимости между расчетными и экспериментальными данными, а также заключить о необходимости корректировки параметров модели, количественной мерой которой является отличие коэффициента регрессии b от 1.

Корректировка параметров модели является частным случаем более общей процедуры *параметризации модели*, т.е. подбора таких значений коэффициентов уравнений, входящих в математическую модель, при которых достигается наилучшее согласование модели и природы.

Обычно используют наиболее доступные возможности оценки параметров модели, т.е. обращение к табличным данным или теоретическому расчету, а также их независимое экспериментальное определение по другим методикам. Если это невозможно, тогда для установления величины какого-либо неопределенного параметра k полученной программной модели проводят серию вычислений, каждый раз варьируя значение этого параметра в пределах

предполагаемого интервала его изменения. При этом рассчитывают значения одного или нескольких *индикаторов*, т.е. таких выходных характеристик процесса y^* , которые наиболее чувствительны к параметру k и поддаются экспериментальному определению ($y_{\text{э}}^*$), получив расчетную зависимость $y^*(k)$, нетрудно установить искомое значение параметра k_0 , при котором $y_{\text{э}}^* = y^*(k_0)$.

Таким образом, модели основных физико-технических процессов в рабочей зоне технологической системы базирующиеся на системах уравнений баланса и краевых условиях или использующие структурные представления для идеальных и неидеальных технологических потоков, а также их комбинации позволяют создавать адекватные математические модели детерминированных систем как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами и находить методы и алгоритмы решения технологических задач.

Математические модели связывают входные (независимые) переменные процесса $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемые воздействиями, с выходными (зависимыми) характеристиками $Y(y_1, y_2, \dots, y_m)$ (рис. 3.1), которые обычно именуют откликами, в виде уравнения связи

$$Y=f(X) \quad (3.1)$$

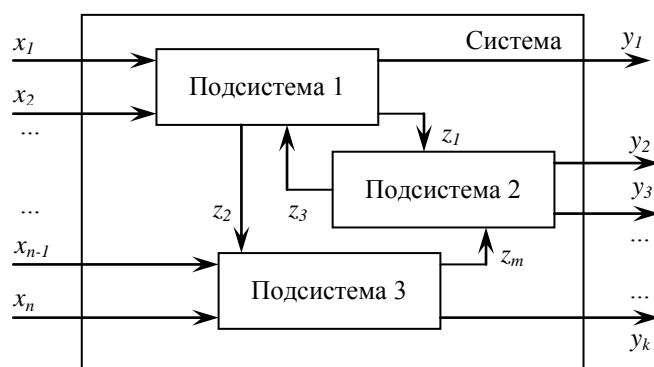


Рис. 3.1. Модель системы детерминированных процессов.

Любому реальному процессу свойственны случайные колебания, вызываемые физической изменчивостью каких-либо факторов $x_i \pm \Delta x_i(\tau)$ или внешними случайными воздействиями. В силу этого при равном среднем значении входных характеристик $X(\tau)$ в моменты τ_1 и τ_2 выходные параметры $Y(\tau)$, будут неодинаковыми (рис.3.2). Поэтому для вероятностных процессов, где по сравнению с $x_i(\tau)$ нельзя пренебречь случайными колебаниями $\Delta x_i(\tau)$ и

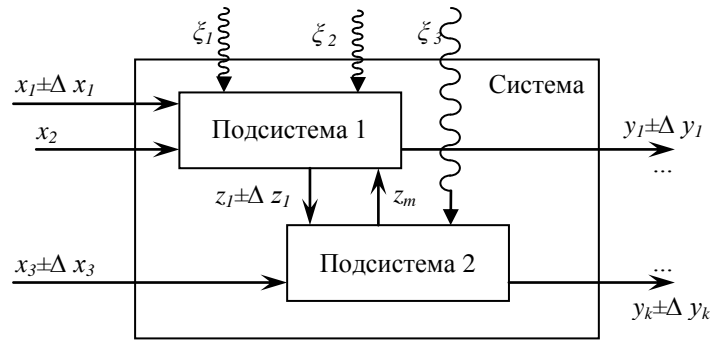


Рис.3.2. Модель системы стохастических процессов

случайными внешними воздействиями $\xi_j(\tau)$, необходимо характеризовать систему с учетом статистического закона распределения мгновенных значений $Y(\tau)$ относительно средней величины $Y_{cp}(\tau)$ уравнением

$$Y(\tau) = Y_{cp}(\tau) \pm \Delta Y(\tau) = f(X_{cp}) + \zeta(\Delta X, \xi) \quad (3.2)$$

Модели, отображающие случайный (стохастический) характер параметров и факторов системы, называются *статистическими* или *стохастическими* в отличие от *детерминированных*, не учитывающих вероятностных характеристик процессов.

По мере уменьшения величины параметров ΔX и ξ уравнение (3.2) приближается по структуре к уравнению (1.1), описывающему детерминированные системы.

Обычно детерминированные модели (3.1), представляющие собой систему уравнений, удастся составить только в тех случаях, когда о процессах в описываемой системе имеются ясные физические представления и эти представления можно формализовать. В таких случаях говорят, что система представляет собой «белый ящик» - объект с известной структурой и функциями.

Однако получаемая таким образом модель может оказаться громоздкой, а ее информационное обеспечение весьма трудоемким. Поэтому часто используют статистические модели для описания детерминированных систем. В таких случаях рассматривают систему как «черный ящик» с неизвестной структурой, в котором доступны для изучения только контролируемые входные параметры X и измеримые выходные характеристики Y . Получив таблицу соответствий $\{x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n\}$, принимают их за случайную выборку из генеральной статистической совокупности $\{X, Y\}$ и описывают соотношением (3.2). Полученная статистическая модель при соответствующей интерпретации результатов позволяет раскрыть механизм, сделать «белыми» некоторые части устройства и функционирования «черного ящика».

Детерминированные модели (3.1), могут также использоваться для описания стохастических систем, если объектом изучения являются их усредненные характеристики. Таким образом, статистические модели являются более широким классом моделей и включают детерминированные модели как предельный частный случай, в котором выходные параметры Y однозначно определяются входными переменными X .

Соотношения (3.1) и (3.2) являются математическими моделями процессов, приближенно описывающими происходящие в системе изменения. Если доказано подобие натуральных и моделирующих процессов, то можно говорить об *адекватности моделей*.

В зависимости от характера и пространственной структуры описываемых систем различаются модели с *распределенными* и *сосредоточенными параметрами*. В связи с различной интенсивностью моделируемых процессов во времени различают: *статические модели*, описывающие установившиеся процессы вблизи состояния равновесия; *стационарные модели*, характеризующие постоянством основных параметров во времени; *динамические модели* систем, в которых входной переменной процесса является время.

В зависимости от конкретного вида применяемого математического аппарата, различают модели матричные, сетевые, дифференциальные, интегральные, алгоритмические, программные и др.

Лекция № 27

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ.

Выбор вида статистической модели

Приступая к построению статистической модели, экспериментатор обычно имеет начальные представления о том, как влияют изучаемые факторы на выходные параметры.

При выборе вида модели обычно отвечают на вопрос, допустимо ли представлять функцию отклика линейной или заведомо известно, что зависимости являются немонотонными или сильно нелинейными. В области, где функция отклика имеет экстремум, предположение о линейном характере модели скорее всего не будет подтверждено. Если в дальнейшем потребуется, могут быть проведены дополнительные опыты по уточнению вида модели. При этом результаты первой серии опытов не пропадают и используются в полной мере для построения нелинейной модели.

При планировании экспериментов исходный этап включает определение основного уровня факторов ($X=0$) и выбор интервалов варьирования ΔX с учетом области действия разрабатываемой модели, предполагаемого характера поверхности отклика и вероятной погрешности определения параметров Y , а также точности фиксирования принятых уровней факторов. Чем больше погрешность опытов и ниже точность поддержания факторов, тем шире должны быть приняты их интервалы варьирования.

Рассмотрим основные виды линейных и нелинейных статических моделей.

1. При разработке линейной модели ограничиваются обычно варьированием факторов на двух уровнях. Для проведения *полного факторного эксперимента* (ПФЭ) при k факторах необходимо осуществить $N=2^k$ опытов со всевозможными сочетаниями двух ($x=-1$ и $x=+1$) уровней факторов (табл.20.1)

Таблица 20.1

Матрица планирования ПФЭ 2^2

| № опыта | Факторы x_i | |
|---------|---------------|-------|
| | x_1 | x_2 |
| 1 | + | + |
| 2 | + | — |
| 3 | — | + |
| 4 | — | — |

Матрица планирования ПФЭ 2^3 получается повторением матрицы ПФЭ 2^2 для факторов x_1 и x_2 при $x_3 = -1$ и $x_3 = +1$ (табл.20.2).

Таблица 20.2

Матрица планирования ПФЭ 2^3

| № опыта | Факторы x_i | | |
|---------|---------------|-------|-------|
| | x_1 | x_2 | x_3 |
| 1 | + | + | + |
| 2 | + | — | + |
| 3 | — | + | + |
| 4 | — | — | + |
| 5 | + | + | — |
| 6 | + | — | — |
| 7 | — | + | — |
| 8 | — | — | — |

Аналогичным образом могут быть построены матрицы планирования с большим числом факторов, однако при этом число опытов быстро растет и при $k \geq 5$ становится весьма значительным. При этом количество опытов (2^k) намного превышает число неизвестных коэффициентов регрессии ($k+1$) линейной модели.

Для построения трех факторной модели необходимо определить четыре коэффициента (b_0, b_1, b_2, b_3), поэтому достаточно всего четырех опытов и можно воспользоваться *дробным факторным экспериментом* (ДФЭ) - половиной ПФЭ 2^3 , называемой *полурепликой* 2^{3-1} . Для этого надо выбрать из опытов, матрицы ПФЭ 2^3 (табл.20.2), такие, в которых бы факторы x_1, x_2, x_3 , равномерно принимали все возможные значения. Если воспользоваться

генерирующим соотношением, $x_3 = +x_1x_2$ (или $x_3 = -x_1x_2$), то можно получить две антисимметричные экономные матрицы ДФЭ, одинаково пригодные для построения модели 2^{3-1} (табл.20.3)

Таблица 20.3

Матрица планирования ДФЭ 2^{3-1} ($x_3 = -x_1x_2$)

| № опыта | Факторы x_i | | |
|---------|---------------|-------|-------|
| | x_1 | x_2 | x_3 |
| 1 | + | + | — |
| 2 | + | — | + |
| 3 | — | + | + |
| 4 | — | — | — |

Аналогичным образом могут быть построены полуреплики, четверть реплики, и реплики более высокой дробности ПФЭ 2^k , что дает существенную экономию количества опытов.

Например для $k=6$ ПФЭ требует проведения $2^6=64$ опытов. Однако для определения 7 коэффициентов линейного уравнения регрессии задачу можно решать, проведя всего 8 опытов, т.е. осуществив ДФЭ 2^{6-3} в котором реплика дробности 1/8. Рекомендуемыми генерирующими соотношениями при этом могут быть $x_4 = x_1x_2x_3$, $x_5 = x_1x_2$, $x_6 = x_1x_3$ или др.

2. При построении нелинейной модели, учитывающей кроме линейных членов также некоторые взаимодействия ($x_i x_j$), в матрицу вводят дополнительные столбцы, содержащие соответствующие произведения факторов (табл.20.4) и увеличивают число опытов.

Таблица 20.4

Матрица планирования ДФЭ 2^{4-1} ($x_4 = x_1x_2x_3$)

| № опыта | Факторы x_i | | | | | Взаимодействующие факторы $x_i x_j$ | | |
|---------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------------------------------------|-----------|-----------|
| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | $x_1 x_2$ | $x_2 x_4$ | $x_2 x_3$ |
| 1 | + | + | + | + | + | + | + | + |
| 2 | + | — | + | + | — | — | — | + |
| 3 | + | + | — | + | — | — | + | — |
| 4 | + | — | — | + | + | + | — | — |
| 5 | + | + | + | — | — | + | — | — |
| 6 | + | — | + | — | + | — | + | — |
| 7 | + | + | — | — | + | — | — | + |
| 8 | + | — | — | — | — | + | + | + |
| 9 | + | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | + | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | + | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|

Так, планируя выявить эффекты взаимодействия факторов x_1x_2 , x_2x_4 , и x_2x_3 при $k=4$ можно воспользоваться восемью опытами, если для построения матрицы экспериментов воспользоваться генерирующим соотношением, например $x_4 = x_1x_2x_3$ (табл.20.4). Это позволяет найти четыре коэффициента для линейных членов (b_1, b_2, b_3, b_4), свободный член (b_0) и три эффекта взаимодействия (b_{12}, b_{24}, b_{23}).

Условия проведения опытов задают значения факторов в столбцах x_1, x_2, x_3, x_4 . Столбец x_0 заполнен знаками «+», а столбцы x_1x_2, x_2x_4, x_2x_3 , образованы как произведения соответствующих столбцов и применяются при последующем вычислении коэффициентов регрессии.

Матрицы планирования экспериментов (табл.20.1-20.4) формируются таким образом, чтобы выполнить обеспечивающие простоту вычисления и оптимальные оценки коэффициентов модели требования:

1. *Нормировки* - сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу элементов N :

$$\sum_{u=1}^N (x_n)_u^2 = N.$$

2. *Симметрии* - сумма элементов каждого столбца равна нулю:

$$\sum_{u=1}^N (x_n)_u = 0.$$

3. *Ортогональности* - сумма произведений элементов каждой пары столбцов равна нулю.

$$\sum_{u=1}^N (x_n x_m)_u = 0; \quad (n, m = 1, 2, \dots, k; n \neq m).$$

При выполнении этих требований все коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга с одинаковой погрешностью по результатам всех N опытов.

Лекция №28

ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ.

Если поверхность отклика является существенно нелинейной, тогда в уравнение модели необходимо ввести квадратичные члены второго порядка. Для этого достраивают матрицу в соответствии с планами эксперимента второго порядка.

Расширенная матрица содержит:

- N_1 опытов в точках ДФЭ - ядро плана, из которого определяются линейные члены и их взаимодействия;
- n_0 опытов в центре плана, для оценки ошибки опытов;
- $2k$ дополнительных опытов в «звездных» точках, расположенных по координатным осям на расстоянии $\pm\alpha$.

Отсюда общее число опытов:

$$N = N_1 + n_0 + 2k$$

Число уровней варьирования каждого фактора $(-\alpha; -1; 0; +1; +\alpha)$ равно 5. Для облегчения вычислений и для того, чтобы параметры модели определялись независимо, план должен быть ортогональным. Это достигается введением вместо x_i^2 нового нормализованного фактора.

$$x'_i = x_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 = x_i^2 - \bar{x}_i^2,$$

где u - номер опыта, \bar{x}_i^2 - среднее значение x_i^2 .

x'_i при числе факторов $k=2,3,4,5$ соответственно равняется 0,667; 0,73; 0,80; 0,776. (при $k=5$ применяется полуреплика). Кроме того выбирается «звездное» плечо α по формуле.

$$\alpha = \sqrt{0,5 \sqrt{N_1(N_1 + n_0 + 2k)} - N_1}.$$

В силу ортогональности планирования все параметры нормализованной модели второго порядка определяются независимо друг от друга:

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} y_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}; \quad b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u y_u}{\sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u^2}, \quad (i \neq j);$$

$$b_{ii} = \frac{\sum_{u=1}^N (x'_i)_u y_u}{\sum_{u=1}^N (x'_i)_u^2}; \quad b_0 = \frac{\sum_{u=1}^N y_u}{N} - \sum_{i=1}^k b_{ii} \bar{x}_i^2.$$

В числителях данных формул находятся суммы произведений значений отклика y_u и значений нормализованного фактора в соответствующем столбце x_{iu} , а в знаменателе - сумма квадратов значений нормализованных факторов из соответствующих столбцов.

Дисперсия оценок параметров модели находится по формулам:

$$S^2(b_i) = \frac{S_b^2}{\sum_{u=1}^N (x_i)_u^2}; \quad S^2(b_{ij}) = \frac{S_b^2}{\sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u^2};$$

$$S^2(b_{ii}) = \frac{S_b^2}{\sum_{u=1}^N (x'_i)_u^2}; \quad S^2(b_0) = \frac{S_b^2}{N} + \sum_{i=1}^k (\bar{x}_i^2) S^2(b_{ii}).$$

Недостатком центрального композиционного ортогонального планирования (ЦКОП) второго порядка является то, что параметры модели определяются с различной точностью, так как у них различны дисперсии. Поэтому информация о поверхности отклика, содержащаяся в модели, полученной после реализации ЦКОП второго порядка, различна в разных направлениях факторного пространства.

Математические модели связывают входные (независимые) переменные процесса $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемые воздействиями, с выходными (зависимыми) характеристиками $Y(y_1, y_2, \dots, y_m)$ (рис. 3.1), которые обычно именуют откликами, в виде уравнения связи

$$Y=f(X) \tag{3.1}$$

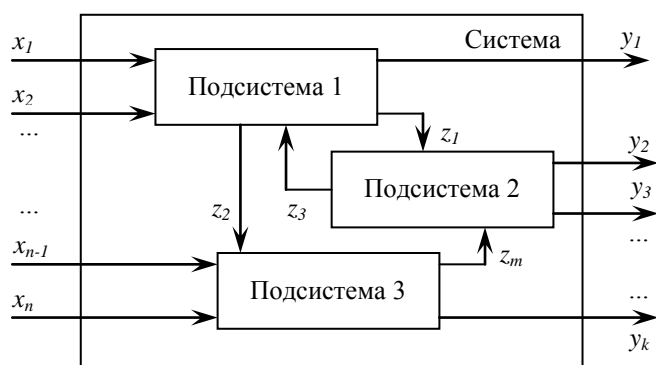


Рис. 3.1. Модель системы детерминированных процессов.

Любому реальному процессу свойственны случайные колебания, вызываемые физической изменчивостью каких-либо факторов $x_i \pm \Delta x_i(\tau)$ или внешними случайными воздействиями. В силу этого при равном среднем значении входных характеристик $X(\tau)$ в моменты τ_1 и τ_2 выходные параметры $Y(\tau)$, будут неодинаковыми (рис.3.2). Поэтому для вероятностных процессов, где по сравнению с $x_i(\tau)$ нельзя пренебречь случайными колебаниями $\Delta x_i(\tau)$ и

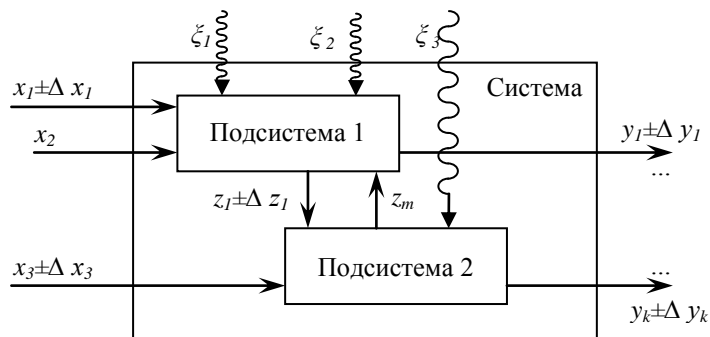


Рис.3.2. Модель системы стохастических процессов

случайными внешними воздействиями $\xi_j(\tau)$, необходимо характеризовать систему с учетом статистического закона распределения мгновенных значений $Y(\tau)$ относительно средней величины $Y_{cp}(\tau)$ уравнением

$$Y(\tau) = Y_{cp}(\tau) \pm \Delta Y(\tau) = f(X_{cp}) + \zeta(\Delta X, \xi) \quad (3.2)$$

Модели, отображающие случайный (стохастический) характер параметров и факторов системы, называются *статистическими* или

стохастическими в отличие от *детерминированных*, не учитывающих вероятностных характеристик процессов.

По мере уменьшения величины параметров ΔX и ξ уравнение (3.2) приближается по структуре к уравнению (1.1), описывающему детерминированные системы.

Обычно детерминированные модели (3.1), представляющие собой систему уравнений, удается составить только в тех случаях, когда о процессах в описываемой системе имеются ясные физические представления и эти представления можно формализовать. В таких случаях говорят, что система представляет собой «белый ящик» - объект с известной структурой и функциями.

Однако получаемая таким образом модель может оказаться громоздкой, а ее информационное обеспечение весьма трудоемким. Поэтому часто используют статистические модели для описания детерминированных систем. В таких случаях рассматривают систему как «черный ящик» с неизвестной структурой, в котором доступны для изучения только контролируемые входные параметры X и измеримые выходные характеристики Y . Получив таблицу соответствий $\{x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n\}$, принимают их за случайную выборку из генеральной статистической совокупности $\{X, Y\}$ и описывают соотношением (3.2). Полученная статистическая модель при соответствующей интерпретации результатов позволяет раскрыть механизм, сделать «белыми» некоторые части устройства и функционирования «черного ящика».

Детерминированные модели (3.1), могут также использоваться для описания стохастических систем, если объектом изучения являются их усредненные характеристики. Таким образом, статистические модели являются более широким классом моделей и включают детерминированные модели как предельный частный случай, в котором выходные параметры Y однозначно определяются входными переменными X .

Соотношения (3.1) и (3.2) являются математическими моделями процессов, приближенно описывающими происходящие в системе изменения. Если доказано подобие натуральных и моделирующих процессов, то можно говорить об *адекватности моделей*.

В зависимости от характера и пространственной структуры описываемых систем различаются модели с *распределенными* и *сосредоточенными*

параметрами. В связи с различной интенсивностью моделируемых процессов во времени различают: *статические модели*, описывающие установившиеся процессы вблизи состояния равновесия; *стационарные модели*, характеризующиеся постоянством основных параметров во времени; *динамические модели* систем, в которых входной переменной процесса является время.

В зависимости от конкретного вида применяемого математического аппарата, различают модели матричные, сетевые, дифференциальные, интегральные, алгоритмические, программные и др.

Лекция №29

РОТОТАБЕЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ.

Существует другой способ центрального композиционного планирования второго порядка, позволяющий при помощи полученной модели описывать поверхность отклики с одинаковой точностью по всем направлениям, при этом остаточные дисперсии на одинаковых расстояниях от центра плана являются равными и наименьшими из возможных. Такое планирование получило название *рототабельного*. При центральном композиционном рототабельном планировании (ЦКРП) значение звездного плеча определяется о формуле:

$$\alpha = \sqrt[4]{N_1},$$

где N_1 - число опытов ядра плана

В зависимости от выбора числа опытов в центре плана обеспечивается либо так называемая *униформность*, либо *ортогональность* плана. В первом случае дисперсия предсказания сравнительно мало изменяется или совсем не изменяется в радиусе $x_n = \pm 1$ от центра плана. Для обеспечения униформности плана должно соблюдаться равенство

$$n_0 = \lambda(N_1 + 4\sqrt{N_1} + 4) - N_1 - 2k,$$

в котором λ для числа факторов $k=2,3,4,5,6,7$ равно соответственно 0,7844; 0,8385; 0,8705; 0,8918; 0,9070; 0,9185.

Чтобы рототабельный план был ортогональным, число опытов в центре плана должно соответствовать равенству

$$n_0 = 4\sqrt{N_1} - 2k + 4,$$

полученному из предыдущего при $\lambda=1$. Расчет по нему в некоторых случаях дает дробные значения n_0 , поэтому их приходится округлять до ближайшего целого числа, нарушая при этом условия униформности. Однако эти отклонения оказываются настолько незначительными, что ими можно пренебречь.

Для построения матриц центрального композиционного рототабельного равномерного планирования (ЦКРУП) рассчитывается и используется ряд характеристик (табл.22.1)

Таблица 22.1

Характеристики ЦКРУП второго порядка

| Число факторов, k | Число опытов ядра, N_I | Число «звездных» точек, $2k$ | Число нулевых точек, n_0 | «Звездное» плечо, α | Общее число опытов, N |
|---------------------|--------------------------|------------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------|
| 2 | 4 | 4 | 5 | 1,414 | 13 |
| 3 | 8 | 6 | 6 | 1,682 | 20 |
| 4 | 16 | 8 | 7 | 2 | 31 |
| 5 | 16 | 10 | 6 | 2 | 32 |

Матрицы рототабельного равномерного планирования не ортогональны, поэтому параметры модели рассчитываются более сложным способом, чем при ортогональном планировании:

$$b_0 = d_1 \sum_{u=1}^N y_u - d_2 \sum_{i=1}^k \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 y_u ;$$

$$b_i = d_3 \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u ;$$

$$b_{ij} = d_4 \sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u y_u , \quad (i \neq j);$$

$$b_{ii} = d_5 \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 y_u + d_6 \sum_{i=1}^k \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 y_u - d_2 \sum_{u=1}^N y_u$$

Дисперсии параметров модели

$$S^2(b_0) = d_1 S_b^2 ; \quad S^2(b_i) = d_3 S_b^2 ;$$

$$S^2(b_{ij}) = d_4 S_b^2 ; \quad S^2(b_{ii}) = d_7 S_b^2 .$$

Соответствующие условиям опытов значения d_i выбираются для конкретных случаев планирования эксперимента (табл.22.2)

Таблица 22.2

Значения d_i для вычисления параметров модели

| k | N | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 | d_5 | d_6 | d_7 |
|---|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2 | 13 | 0,2 | 0,1 | 0,1250 | 0,2500 | 0,1251 | 0,0187 | 0,1438 |
| 3 | 20 | 0,1663 | 0,0568 | 0,0732 | 0,1250 | 0,0625 | 0,0069 | 0,0695 |
| 4 | 31 | 0,1428 | 0,0357 | 0,0417 | 0,0625 | 0,0312 | 0,0037 | 0,0350 |
| 5 | 32 | 0,1591 | 0,0341 | 0,0417 | 0,0625 | 0,0312 | 0,0028 | 0,0341 |

Так как при планировании экспериментов несколько опытов проводятся параллельно при основном уровне факторов, то их результаты позволяют оценить дисперсию воспроизводимости

$$S_b^2 = \frac{\sum_{u=1}^{n_0} (y_{ou} - \bar{y}_o)^2}{n_0 - 1}.$$

Проверка адекватности модели производится при помощи критерия Фишера. Дисперсия адекватности в данном случае определяется по формуле:

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N (y_{up} - y_{uz})^2 - \sum_{u=1}^{n_0} (y_{ou} - \bar{y}_o)^2}{N - k' - (n_0 - 1)},$$

где y_{up} и y_{uz} – расчетные и экспериментальные значения; k' – число статистически значимых параметров модели.

При использовании рототабельных планов исключать из модели без пересчета остальных можно только незначимые оценки b_i и b_{ij} . Исключение любого из незначимых параметров b_0 и b_{ii} требует пересчета остальных в данной группе.

При реализации намеченных планированием экспериментов важно учитывать требования *рандомизации* опытов, т.е. проведения опытов в однородных условиях, с одинаковой погрешностью в случайном порядке. Рандомизация проводится для того, чтобы изменения свойств материалов, характеристик оборудования, средств оснащения, установок и измерительных приборов вследствие их износа и разрушения, смены персонала и т.д. не вызывали, искажающего влияния изучаемых факторов и временного «дрейфа» параметров. Поэтому рандомизируют опыты, проводя их в случайном порядке, в отличие от нумерации в матрице планирования.

Математические модели связывают входные (независимые) переменные процесса $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемые воздействиями, с выходными (зависимыми) характеристиками $Y(y_1, y_2, \dots, y_m)$ (рис. 3.1), которые обычно именуют откликами, в виде уравнения связи

$$Y=f(X) \tag{3.1}$$

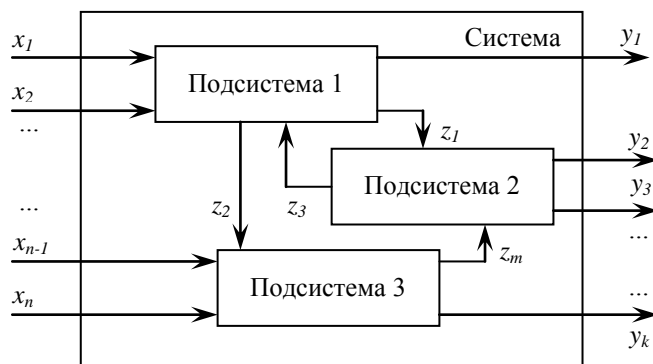


Рис. 3.1. Модель системы детерминированных процессов.

Любому реальному процессу свойственны случайные колебания, вызываемые физической изменчивостью каких-либо факторов $x_i \pm \Delta x_i(\tau)$ или внешними случайными воздействиями. В силу этого при равном среднем значении входных характеристик $X(\tau)$ в моменты τ_1 и τ_2 выходные параметры $Y(\tau)$, будут неодинаковыми (рис.3.2). Поэтому для вероятностных процессов, где по сравнению с $x_i(\tau)$ нельзя пренебречь случайными колебаниями $\Delta x_i(\tau)$ и

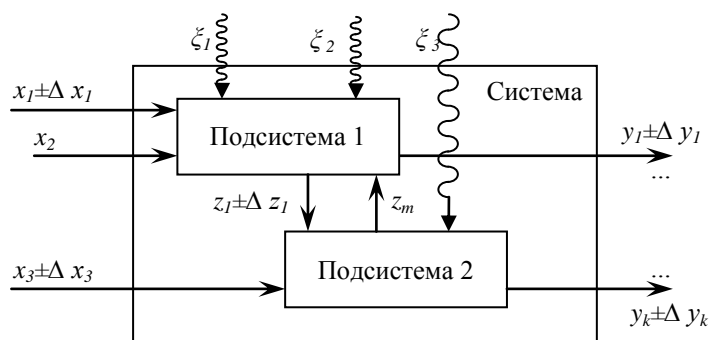


Рис.3.2. Модель системы стохастических процессов

случайными внешними воздействиями $\xi_j(\tau)$, необходимо характеризовать систему с учетом статистического закона распределения мгновенных значений $Y(\tau)$ относительно средней величины $Y_{cp}(\tau)$ уравнением

$$Y(\tau) = Y_{cp}(\tau) \pm \Delta Y(\tau) = f(X_{cp}) + \zeta(\Delta X, \xi) \quad (3.2)$$

Модели, отображающие случайный (стохастический) характер параметров и факторов системы, называются *статистическими* или *стохастическими* в отличие от *детерминированных*, не учитывающих вероятностных характеристик процессов.

По мере уменьшения величины параметров ΔX и ξ уравнение (3.2) приближается по структуре к уравнению (1.1), описывающему детерминированные системы.

Обычно детерминированные модели (3.1), представляющие собой систему уравнений, удается составить только в тех случаях, когда о процессах в описываемой системе имеются ясные физические представления и эти представления можно формализовать. В таких случаях говорят, что система представляет собой «белый ящик» - объект с известной структурой и функциями.

Однако получаемая таким образом модель может оказаться громоздкой, а ее информационное обеспечение весьма трудоемким. Поэтому часто используют статистические модели для описания детерминированных систем. В таких случаях рассматривают систему как «черный ящик» с неизвестной структурой, в котором доступны для изучения только контролируемые входные параметры X и измеримые выходные характеристики Y . Получив таблицу соответствий $\{x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n\}$, принимают их за случайную выборку из генеральной статистической совокупности $\{X, Y\}$ и описывают соотношением (3.2). Полученная статистическая модель при соответствующей интерпретации результатов позволяет раскрыть механизм, сделать «белыми» некоторые части устройства и функционирования «черного ящика».

Детерминированные модели (3.1), могут также использоваться для описания стохастических систем, если объектом изучения являются их усредненные характеристики. Таким образом, статистические модели являются более широким классом моделей и включают детерминированные модели как предельный частный случай, в котором выходные параметры Y однозначно определяются входными переменными X .

Соотношения (3.1) и (3.2) являются математическими моделями процессов, приближенно описывающими происходящие в системе изменения. Если доказано подобие натуральных и моделирующих процессов, то можно говорить об *адекватности моделей*.

В зависимости от характера и пространственной структуры описываемых систем различаются модели с *распределенными* и *сосредоточенными параметрами*. В связи с различной интенсивностью моделируемых процессов во времени различают: *статические модели*, описывающие установившиеся

процессы вблизи состояния равновесия; *стационарные модели*, характеризующиеся постоянством основных параметров во времени; *динамические модели* систем, в которых входной переменной процесса является время.

В зависимости от конкретного вида применяемого математического аппарата, различают модели матричные, сетевые, дифференциальные, интегральные, алгоритмические, программные и др.

Лекция №30

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.

Имитация как инструмент исследования сложных систем

Развитие вычислительной техники привело к возникновению чисто машинных методов решения задач исследования реальных объектов. Одним из таких методов является моделирование процессов на персональных компьютерах. При моделировании в компьютере вырабатывается информация, описывающая элементарные явления исследуемых процессов с учетом их связей и взаимовлияний. Получаемая таким образом информация о состоянии процесса используется для определения тех характеристик процессов, которые требуется получить в результате моделирования. С точки зрения перерабатываемой в компьютерах информации моделирование является имитацией элементарных явлений, составляющих исследуемый процесс, с сохранением структуры взаимодействия между ними.

Здесь прослеживается прямая аналогия между исследованием реальных процессов с помощью имитационного моделирования и экспериментальным их исследованием в натуре. При таком моделировании нет необходимости создавать для каждого процесса экспериментальные установки; этот метод обеспечивает простоту, оперативность и небольшую стоимость исследования. Имитация – прекрасный способ обучения.

При построении имитационных моделей и проведении экспериментов с ними особое значение имеет соответствие имитируемых процессов их физической сущности и эффективность хранения статистической информации. От того, каким образом накапливается и хранится статистическая информация, существенно зависит машинное время, затрачиваемое на экспериментирование.

Обратимся теперь к основным методологическим вопросам построения и использования моделей, в некоторой мере повторив уже изложенный выше материал.

Моделирование применяется в основном для решения двух групп задач: исследования и обучения. К первой относятся вопросы использования моделей для изучения физических законов, подготовки и рассмотрения действия новых разработок.

Задачи исследования, решаемые с помощью моделирования, можно разделить на четыре вида:

- *прямые задачи анализа*, при решении которых исследуемая система задается параметрами своих элементов и параметрами исходного режима, структурой или уравнениями и требуется определить реакцию системы на действующие силы;

- *обратные задачи анализа*, которые по известной реакции системы требуют найти возмущения, заставившие рассматриваемую систему прийти к данному состоянию и данной реакции;

- *задачи синтеза*, требующие нахождения таких параметров, при которых процессы в системе будут иметь желательный по каким-либо соображениям характер;

- *индуктивные задачи*, решение которых имеет целью проверку гипотез, уточнение уравнений, описывающих процессы, происходящие в системе, выяснение свойств этих элементов, отладка программ (алгоритмов) для расчетов на компьютере.

Необходимость исследования системы, как совокупности множества элементов, позволяет разделить процесс моделирования на две части:

- составление математических или физических моделей элементов;
- разработка схемы связей или схемы сопряжения элементов.

Необходимость схемы сопряжения очевидна, так как только такая схема позволяет конструировать сложную систему и все возможные (на взгляд исследователя) ситуации. Такая модель позволяет передавать входные воздействия или реакции элементов от одной модели элемента к другой вне зависимости от класса и структуры математических моделей элементов. Если представить математические модели отдельных элементов в виде реализованных на доступном вычислительной машине языке программных модулей, то схеме сопряжения (в тех же терминах) будет соответствовать некоторый управляющий модуль, в набор функций которого входит ввод данных, передача информации от одних программных модулей другим (причем, иногда, в зависимости от смысла этой информации, могут подключаться различные модули), представление результатов экспериментов в удобной для исследователя форме.

Очевидно, что, воспроизводя на такой модели различные общесистемные ситуации, мы как бы воспроизводим, подражаем, имитируем процессы, имеющие место в системе, на моделях элементов при определенных условиях, налагаемых на связи между ними. Исследования такого рода, то есть исследования свойств всей системы на основе моделей ее элементов, и называют имитационным моделированием.

Можно привести примеры использования имитации как единственно возможного способа исследования из различных областей, в которых происходит теоретическая проработка того или иного процесса, затем эта теоретическая проработка подвергается проверке с использованием как реально существующих, так и предполагаемых данных и потом - эксплуатации. Для некоторых объектов (в частности, автоматизированных систем управления), у которых велика стоимость и продолжительность разработки, а также большое значение имеет то, насколько верно выбраны элементы таких объектов, несомненно огромное значение имеет возможность исследования количественных, качественных и структурных свойств на стадии проектирования.

Основное назначение имитационного моделирования проектируемой системы состоит в воспроизведении и исследовании общесистемных ситуаций, иными словами - в изучении поведения объекта под воздействием управляющих команд или различного рода возмущений. Если мы знаем, как поведет себя объект управления под воздействием той или иной команды, какова будет его реакция на то или иное решение системы управления, то практически уже будем знать, как нужно управлять этим объектом и какова будет эффективность знания о структуре и свойствах элементов системы. Получение этих знаний таким способом, а не на натурных испытаниях, дает возможность значительно упростить, удешевить и ускорить разработку и внедрение системы жизнеобеспечения человека, так и автоматизированной системы управления ею.

Использование имитационного моделирования при проектировании систем является приложением к традиционным сферам практического использования этого способа моделирования.

Вторым направлением является использование имитации в функционирующих автоматизированных системах обработки информации и

управления как составной части математического обеспечения. Целью этих систем управления является подготовка информации, необходимой для принятия тех или иных решений, формирование вариантов таких решений и, в некоторых случаях, реализация этих решений. Учитывая вероятностный характер процессов в автоматизированных системах обработки информации и управления, несовершенство имеющихся методов подготовки решений, а во многих случаях и недостаточное качество исходных данных, представляется весьма целесообразным предварительная проверка сформированных вариантов решений (иными словами, предварительная оценка показателей эффективности автоматизированных систем и поведения объектов управления под воздействием управляющих команд, вытекающих из принятых решений). Здесь, очевидно, могут быть использованы те же имитационные модели, что и на стадии проектирования, но имеющие большую адекватность, чем в процессе разработки системы управления, так как имитационная модель в этом случае будет по возможности максимально адекватна функционирующей системе управления.

Успех любого исследования во многом определяется правильностью выбора методики его проведения. Для подавляющего большинства исследуемых систем методика построения имитационной модели сводится к следующим двум группам этапов:

- 1) *методология имитации* - постановка задачи, подготовка данных, построение модели, оценка адекватности.
- 2) *организация имитационного эксперимента* - планирование эксперимента, экспериментирование, обработка результатов, документирование.

Лекция №31

МЕТОДОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ И ОРГАНИЗАЦИЯ ИМИТАЦИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ.

Успех любого исследования во многом определяется правильностью выдвигаемых предположений, что исследуемая проблема может быть решена наилучшим образом с помощью имитационного моделирования.

Постановка задачи состоит в определении возможных стратегий и задании этим набора управляемых параметров; определении характеристик внешней среды, задавая набор внешних возмущений; определении набора элементов и их взаимосвязей в исследуемой системе и задании структуры системы; определении критерия выбора стратегии, задав тем самым цели и определяя их относительную значимость.

Подготовка данных

1. Составление описания модели.

Постановка задачи и выбор класса модели (см. рис.24.1) представляют именно те начальные этапы моделирования, которые базируются на изложенной в первой главе методологии системных исследований. В соответствии с этой методологией до решения задачи синтеза составляется описание объекта.

Операции сбора информации и предварительной обработки состоят в организации получения данных на исследуемом объекте посредством тривиального наблюдения и фиксации его результатов в таблицах, графиках и на компьютерных носителях информации. В настоящее время эти операции выполняются с применением современных средств измерения процессов, их фиксации, как с использованием вычислительной

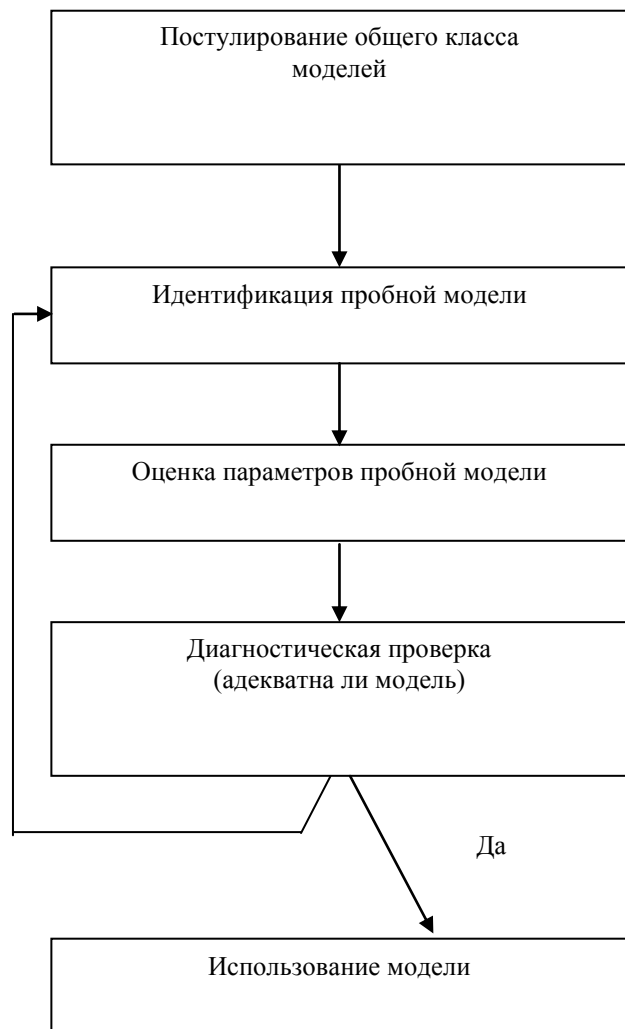


Рис. 24.1. Итеративное построение модели.

техники, так и с помощью других

технических средств. Отметим, что в настоящее время подавляющее большинство технических средств, предназначенных для сбора данных обеспечивают их непосредственный ввод в персональный компьютер.

2. Методика анализа временных рядов.

Целью операции анализа данных является получение стационарной составляющей реализации случайного процесса с выделением из отдельной реализации всех нестационарностей и периодичностей, с фиксацией порядка выделения и описаний нестационарностей и периодичностей, нахождение оценок и подбор теоретического закона распределения вероятностей, наиболее точно в статистическом смысле описывающего распределение реализации. Исследование начинается с анализа отдельных реализаций (рис.24.2).



Рис. 24.2. Анализ отдельной реализации.

Визуальный просмотр реализаций призван выяснить, имеют ли место в реализации нестационарность и периодичность. Если просмотр показал, что процесс содержит подобные изменения, то необходимо провести их анализ. При этом конечной целью является выделение временных изменений из реализаций.

После обнаружения временных изменений, оставшаяся реализация передается вновь на начало схемы, и так повторяется до тех пор, пока при визуальном просмотре не будет принято решение о том, что реализация может принадлежать стационарному процессу. Если это решение принято, то далее применяют точные количественные методы для оценивания основных свойств. При этом вычисляют оценки статистических характеристик - математического ожидания, дисперсии, автокорреляционной функции и других. Находится

также гистограмма частот. Все эти оценки используются для проведения тестов стационарности, периодичности и нормальности.

Следующим этапом исследования реализации является анализ совокупности реализаций (рис.24.3).

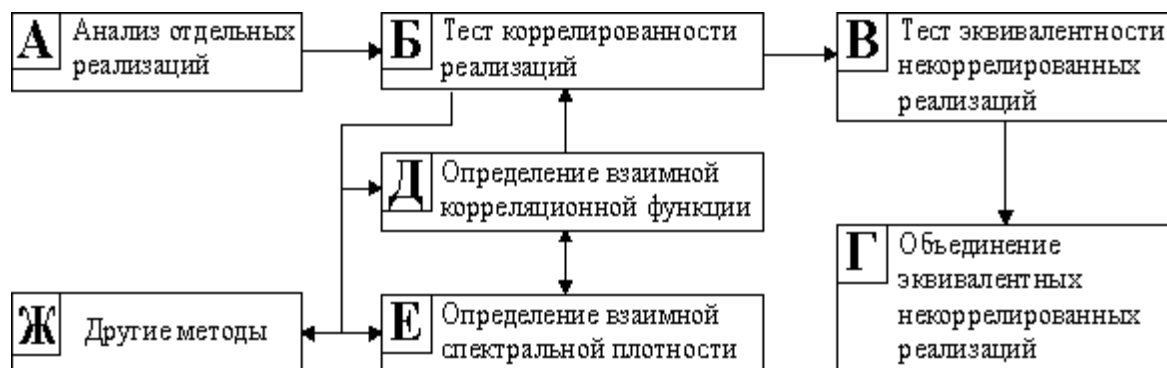


Рис. 24.3. Анализ совокупности реализаций.

Этот анализ начинается с проведения теста коррелированности реализаций. Суть его состоит в том, чтобы по оценкам взаимных корреляционных функций (или взаимных спектральных плотностей) с помощью статистических критериев о значимости коэффициентов корреляции [20], решить в количественной форме с указанием точности, являются ли реализации статистически связанными.

Если реализации коррелированы, то этап анализа совокупности реализаций на этом заканчивается. В противном случае необходимо попытаться установить их эквивалентность. Для этого реализуется тест эквивалентности. Основной его смысл состоит в выявлении эквивалентных по вероятностным свойствам реализаций случайного процесса. При проведении этого теста используются статистические критерии об эквивалентности реализаций (выборки) [20]. В случае обнаружения таких реализаций и в случае, если для моделирования безразлично, какие из процессов, порождающих эти реализации, необходимо использовать, эквивалентные реализации объединяются. При этом основным критерием объединения является представительность реализации в смысле полноты описываемых свойств процесса и длины реализации.

Методы воспроизведения входных воздействий

Исследование объектов и систем управления ими с помощью имитационного моделирования и стремление достичь определенного уровня адекватности модели реальному объекту заставляют непрерывно совершенствовать и развивать методы и устройства моделирования случайных процессов с разнообразными вероятностными свойствами. При этом исследователь может обладать либо общими представлениями о свойствах моделируемого процесса, которые получены в результате анализа реализаций и которые требуется воспроизвести, либо имеет реализации процессов, которые

необходимо увеличить в объеме с сохранением вероятностно-статистических свойств исходных реализаций. В первом случае речь идет о генерировании случайных процессов, во втором - об их имитации.

Практические задачи, использующие статистическую информацию и решаемые подобным образом, могут быть разделены на три класса:

- 1) реализующие только знания о законах распределения вероятностей;
- 2) использующие только сведения о динамических (корреляционных, спектральных и других) свойствах информации;
- 3) использующие данные одновременно о законах распределения вероятностей и динамических свойствах.

Задачи первого класса могут быть решены простым и известным путем [37]: исходная информация помещается в некоторый бункер (урну) и затем каждое из значений наугад вынимается и после фиксации вновь возвращается в урну. Это классический пример снятия каких-либо динамических связей.

С целью сохранения динамических свойств (нарушая при этом полностью или частично одномерный закон распределения вероятностей) может быть использована процедура, связанная с многократным повторением исходной реализации. При этом, если исходная реализация повторяется полностью, то имеет место сохранение одномерного закона распределения вероятностей.

С целью более полного использования вероятностно-статистических свойств случайных процессов по выборкам малой длины (третий класс задач) может быть применена одна из процедур генерирования случайных процессов с заданным законом распределения вероятностей и корреляционными свойствами. Для этого, пользуясь выше рассмотренными методами, получают максимально возможные сведения о вероятностных свойствах случайного процесса (отдельно - о законе распределения вероятностей и отдельно - о корреляционных свойствах). Затем, используя соответствующие процедуры генерирования, воспроизводят реализации с требуемыми динамическими и статическими свойствами.

Вместе с тем, использование методов генерирования, а не имитации случайных процессов, предпочтительнее, так как эти методы более технологичны в использовании из-за возможностей управления параметрами законов распределения вероятностей и корреляцией.

Лекция №32

МЕТОДИКИ ПОСТРОЕНИЯ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ. АГРЕГАТИВНЫЙ ПОДХОД.

Существующие математические схемы описания сложных систем обладают одним существенным недостатком. Он состоит в том, что единым образом можно описать лишь те системы, элементы которых описываются одной и той же математической схемой.

Наиболее существенным с теоретической и практической точки зрения является случай, когда элементы системы описываются разнородными математическими схемами. Из-за отсутствия единого формального описания элементов трудно рассчитывать на создание общих методов исследования систем в целом, а также единого подхода к классификации сложных систем, изучению общих свойств важнейших классов систем их анализу и синтезу. Даже такой, казалось бы, универсальный метод, как статистическое моделирование, для достаточно сложных систем с разнородными параметрами описания элементов оказывается весьма громоздким.

Таким образом, введение унифицированной абстрактной схемы, позволяющей единообразно описывать все элементы системы, имеет существенное значение.

Унифицированной абстрактной схеме придается достаточно общий вид, с тем, чтобы она охватывала разнообразные темы реальных систем. Для этого унифицированная схема должна иметь динамический характер, быть способной описывать обмен сигналами с внешней средой и учитывать действия случайных факторов. Была предложена унифицированная схема, названная агрегатом. Она образована из стохастической системы общего вида конкретизацией операторов переходов и выходов.

Агрегат оказывается удобной схемой для описания широкого класса реальных объектов. Кроме того, представление реальных систем в виде агрегатов позволяет изучить некоторые их общие свойства, связанные со структурой и функционированием. Реализация на ЭВМ алгоритмических (по сути, имитационных) моделей агрегата дает возможность решать многие задачи количественного и качественного анализа сложных систем.

Понятие агрегата.

Пусть T - фиксированное подмножество рассматриваемых моментов времени; X , G , Y , Z - множества любой природы. Элементы указанных множеств будем называть так:

$t \in T$ - моментом времени,
 $x \in X$ - входным сигналом,
 $g \in \Gamma$ - управляющим сигналом,
 $y \in Y$ - выходным сигналом,
 $z \in Z$ - состоянием.

Состояния, входные, выходные и управляющие сигналы рассматриваются как функции времени; их значения в момент t будут обозначаться $z(t)$, $x(t)$, $y(t)$ соответственно.

Под агрегатом понимается объект, определяемый множествами T, X, Γ, Y, Z и операторами H и G . Операторы H и G называют операторами переходов и выходов. Они являются, вообще говоря, случайными и предназначены для реализации функций $z(t)$ и $y(t)$. Структура операторов переходов и выходов выделяет агрегаты среди прочих систем.

Дополнительно вводится пространство параметров B . Пусть элемент этого пространства B имеет вид $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in B$. Значение β фиксировано в рамках каждой конкретной задачи. Это конструктивный параметр. В этой связи управляющий сигнал $y(t)$ является параметром управления.

Рассмотрим сначала реализацию оператора выходов G . Представим его в виде двух операторов G' и G'' . Оператор G' вырабатывает очередные моменты выдачи непустых выходных сигналов, а оператор G'' - содержание сигналов. Операторы эти строятся следующим образом.

В пространстве состояний агрегата Z для каждого $\beta \in B$ и $g \in \Gamma$ определим некоторое множество $Z^Y(g_0, \beta) \subset Z$, вид которого зависит от (g, β) . То есть множество $Z^Y(g_0, \beta)$ в общем случае изменяется при изменении параметров агрегата, когда осуществляется переход к условиям другой задачи. В рамках данной задачи - в моменты поступления новых управляющих сигналов $g(t)$. В интервалах времени между моментами поступления управляющих сигналов множество $Z^Y(g_0, \beta)$ не изменяется и остается таким, каким оно оказалось в момент поступления последнего управляющего сигнала.

Множество $Z^Y(g_0, \beta)$ определяет моменты выдачи выходных сигналов.

Оператор G'' определяет содержание сигналов $y = G'' \{t, z(t), g(t), \beta\}$.

В общем случае оператор G'' является случайным оператором. Это значит, что данным t , $z(t)$, $g(t)$ и β ставится в соответствие не один определенный y , а некоторое множество значений управляющего параметра y с соответствующим распределением вероятностей, задаваемых оператором G'' .

Обратимся теперь к оператору переходов H .

Наряду с состоянием агрегата $z(t)$ рассматриваются также состояние $z(t+0)$, в которое агрегат переходит за “малый” интервал времени. Вид оператора H зависит от того, поступают или не поступают в течение рассматриваемого интервала времени входные и управляющие сигналы. Поэтому его представляют в виде совокупности случайных операторов.

Пусть t'_n - момент поступления в агрегат входного сигнала x'_n , тогда

$$z(t'_n+0)=V'\{t'_n, z(t'_n), g(t'_n), x'_n, \beta\}, \quad (25.1)$$

где под $g(t'_n)$ понимается последний управляющий сигнал, поступивший в момент времени $t < t'_n$.

Если t''_n - момент поступления в агрегат управляющего сигнала g''_n , то

$$z(t''_n+0)=V''\{t''_n, z(t''_n), g''_n, \beta\}, \quad (25.2)$$

Далее, если t'_n - момент одновременного поступления в агрегат и входного x_n , и управляющего g_n сигналов, то

$$z(t_n+0)=V'\{t_n, V''(t_n, z(t_n), g_n, x'_n, \beta), g_n, x_n, \beta\}. \quad (25.3)$$

В этом выражении под $V''\{\bullet\}$ понимается не оператор, а результат его действия на аргументы $t_n, z(t_n), g_n, \beta$, являющийся элементом множества Z . Другими словами, вместо (25.3) можно записать

$$z(t_n+0)=V'\{t_n, z'(t_n+0), g_n, x_n, \beta\},$$

где $z'(t_n+0)$ определяется соотношением (25.2) для $t_n, z(t_n), g_n, \beta$.

Наконец, если полуинтервал $(t_n, t_{n+1}]$ не содержит моментов поступления сигналов, за исключением t_{n+1} , а t_n - момент поступления входного или управляющего сигнала, то для $t \in (t_n, t_{n+1}]$

$$z(t)=U\{t, t_n, z(t_n+0), g(t_n), \beta\}.$$

Здесь, подобно (25.1), под $g(t_n)$ понимается последний управляющий сигнал, поступивший в момент $t \leq t_n$.

Перейдем теперь к описанию типичного процесса функционирования агрегата в терминах рассматриваемой выше реализации операторов H и G .

Пусть в некоторый начальный момент времени t_0 агрегат находится в состоянии z_0 и пусть в моменты t'_1 и t'_2 поступают входные сигналы x'_1 и x'_2 , а в момент t''_1 - управляющий сигнал g''_1 и для определенности $t'_1 < t''_1 < t'_2$.

Рассмотрим сначала полуинтервал $(t_0, t'_n]$. Состояния агрегата $z(t)$ изменяется с течением времени по закону

$$z(t) = U\{t, t_0, z(t_0), g(t_0), \beta\}. \quad (25.4)$$

Предположим, что в момент t^*_1 такой, что $t_0 < t^*_1 < t'_1$, состояние $z(t^*_1)$ достигает множества $Z^Y(g_0, \beta)$. Тогда в момент t^*_1 выдается выходной сигнал

$$y^{(1)}=G''\{t^*_1, z(t^*_1), g_0, \beta\}.$$

Если состояние $z(t)$ опять достигает множества $Z^Y(g_0, \beta)$ в момент t_2^* такой, что $t_1^* < t_2^* < t'_1$, то в момент t_2^* выдается выходной сигнал

$$y^{(2)} = G''\{t_2^*, z(t_2^*), g_0, \beta\}. \quad (25.5)$$

и т.д. Здесь $z(t_1^*)$ и $z(t_2^*)$ определяется из (25.4).

В момент t'_1 в агрегат поступает входной сигнал x'_1 . Состояние агрегата

$$z(t'_1+0) = V'\{t'_1, z(t'_1), g_0, x'_1, \beta\}.$$

Здесь также $z(t'_1)$ определяется из (25.4).

В полуинтервале $(t'_1, t''_1]$ функционирование агрегата можно описать по аналогии с полуинтервалом $(t_0, t'_1]$. Состояние $z(t)$ определяется как

$$z(t) = U\{t, t'_1, z(t'_1+0), g_0, \beta\}. \quad (25.6)$$

Если в моменты t_k^* , такие, что $t'_1 < t_k^* < t''_1$, состояния $z(t_k^*)$ достигают множества $Z^Y(g_0, \beta)$, в каждый из моментов t_k^* выдается выходной сигнал

$$y^{(k)} = G''\{t_k^*, z(t_k^*), g_0, \beta\},$$

где $z(t_k^*)$ определяется из (25.6).

В момент t''_1 в агрегат поступает управляющий сигнал g''_1 и тогда состояния агрегата описывается оператором V'' :

$$z(t''_1+0) = V''\{t''_1, z(t''_1), g''_1, \beta\}. \quad (25.7)$$

Здесь $z(t''_1)$ также определяется из (25.6).

Далее, в полуинтервале $(t''_1, t'_2]$ состояние агрегата изменяется по закону

$$z(t) = U\{t, t''_1, z(t''_1+0), g''_1, \beta\}. \quad (25.8)$$

Если в моменты t_{k+r}^* , такие, что $t''_1 < t_{k+r}^* < t'_2$, $r \geq 1$, состояние $z(t_{k+r}^*)$ достигает множества $Z^Y(g''_1, \beta)$, в каждый из моментов t_{k+r}^* выдается выходной сигнал

$$y^{(k+r)} = G''\{t_{k+r}^*, z(t_{k+r}^*), g''_1, \beta\}.$$

Когда в момент t'_2 в агрегат поступает входной сигнал x'_2 , то состояние агрегата принимает значение

$$z(t'_2+0) = V'\{t'_2, z(t'_2), g''_1, x'_2, \beta\},$$

где $z(t'_2)$ определяется из (25.8).

Затем состояние агрегата в полуинтервале $(t'_2, t^{**}]$ где t^{**} - очередной момент поступления входного или управляющего сигнала, изменяется по закону

$$z(t) = U\{t, t'_2, z(t'_2+0), g''_1, \beta\}$$

и так далее.

Лекция №33 ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.

Динамическое моделирование предприятия (ДМП) представляет собой изучение деятельности предприятия как информационной системы с обратной связью. Он показывает, каким образом взаимодействует организационная структура предприятия; показывает влияние авторитета в руководстве и время запаздывания в решениях и действиях в обеспечении успеха предприятия. ДМП описывает также взаимодействие потоков информации, денежных средств, заказов, товаров, рабочей силы и оборудования на предприятии, в отрасли промышленности и в экономике региона или государства.

С помощью ДМП создается единая структурная схема, в которой интегрируются функциональные отрасли управления, а именно – производство, сбыт, бухгалтерский учет, исследования и технические усовершенствования, капиталовложения. Оно воплощает экспериментальный подход к решению задачи приведения организационной структуры и методов руководства предприятием в соответствие с требованиями промышленного развития.

Динамические модели базируются на понятиях уровней, связанных между собой управляемыми потоками (рис.26.1). На рис.26.1 представлены четыре существенных элемента, которые ниже будут рассмотрены подробнее:

- несколько уровней;
- потоки, перемещающие содержимое одного уровня к другому;
- функции решений (изображенные в виде вентилей), которые регулируют темпы потока между уровнями;
- информационные связи, соединяющие функции решений с уровнями.

Уровни характеризуют возникающие накопления внутри системы. Это товары, имеющиеся на складе, товары в пути, банковская наличность, производственные площади и численность работающих.

Уровни представляют собой те значения переменных в данный момент, которые они имеют в результате накопления из-за разности между входящими и исходящими потоками.

Уровни существуют не только в сетях физических величин, но и в информационной сети.

Темп потока определяет существенные мгновенные потоки между уровнями в системе. Темп отражает активность, в то время как уровень

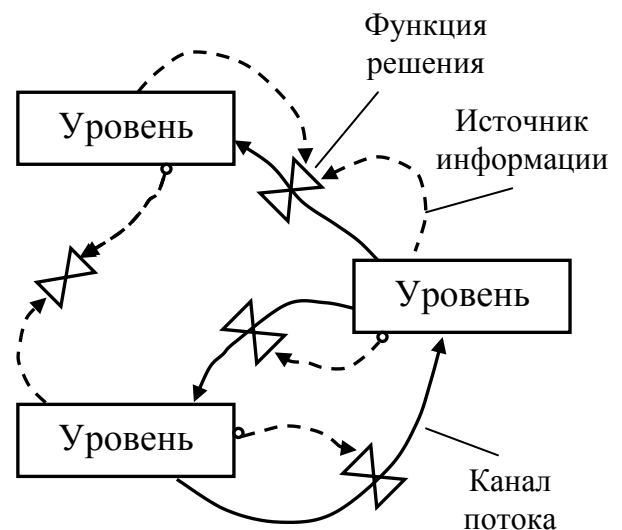


Рис.26.1. Главные элементы динамической модели.

измеряет состояние, которое является результатом активности в системе. Темпы точно так же, как и уровни, существуют во всех шести сетях, которые могут составлять систему – материалов, заказов, денежных средств, рабочей силы, оборудования и информации.

Темпы потока устанавливаются на основе уровней в соответствии с законами, которые определяют вид функций решений. В свою очередь темпы определяют уровни. В состав уровней, которыми определяется темп потока, обычно входит и тот уровень, из которого исходит данный поток.

Функции решений представляют собой формулировку линии поведения, определяющей, каким образом имеющаяся информация об уровнях приводит к выбору решений, связанных с величинами текущих темпов. Все решения касаются предстоящих действий и выражаются в форме темпов потока (выдачи заказов, приобретения оборудования, найма рабочей силы).

На рис.16.1 показано, что функции решений, на основе которых устанавливаются темпы, связаны только с информацией об уровнях. Выбирая весьма короткий интервал времени, мы можем установить в принципе, что данное решение не может зависеть от некоторых других принимаемых в данный момент времени решений (или множеств темпов) в другой части системы. Принцип независимости решений применим на практике: он служит краеугольным камнем построения модели. Из этого принципа не вытекает необходимость чрезмерного сокращения интервалов, для которых производятся расчеты в модели. Он делает возможным построение моделей, не требующих трудоемких вычислений.

Для отражения деятельности промышленного предприятия, необходимы несколько взаимосвязанных сетей:

- *сеть материалов* – темпы потоков и запасов реальных предметов, будь то сырье, незавершенное производство или готовая продукция;
- *сеть заказов* – заказы на товары, требования на трудовые ресурсы, на строительство новых площадей, это результат решений, которые не нашли своего отражения в потоках одной из других сетей;
- *сеть денежных средств* – это кассовая наличность, то есть фактическое движение платежей между денежными уровнями;
- *сеть рабочей силы* – определенное количество людей как индивидуумов, а не количество человеко-часов труда;
- *сеть оборудования* – производственная площадь, инструмент и оборудование, необходимые для производства товаров и показывающие как функционируют заводы и машины, каково имеющееся оборудование, какая часть этого оборудования находится в данный момент в эксплуатации, а также каков темп выхода орудий производства из строя;
- *связующая сеть информации* – последовательность переменных темпов и уровней.

Информационная сеть занимает особое положение в связи с тем, что она служит связующим материалом. В общем случае информационная сеть начинается от уровней и темпов в пяти других сетях и заканчивается у функций решений, определяющих темпы в этих сетях. Основная часть модели будет находиться внутри информационной сети, так как информация – основа для принятия решений.

Для описания общей структуры динамической модели предприятия необходима *система уравнений*. Она должна соответствовать обстановке и взаимодействиям всех элементов моделируемой системы и процессам выработки решений. Модель должна достаточно полно отражать наши представления о реальной системе. Уравнения, которые мы будем рассматривать, образуют основную систему, разработанную в соответствии с уже описанной структурой модели. Будем рассматривать основные классы уравнений, а не особые формы, которые могут принимать отдельные уравнения.

В основном система уравнений состоит из уравнений двух типов – уравнений уровней и уравнений темпов. Для более полного понимания сути уравнений следует рассмотреть вопрос о последовательности вычислений.

Система уравнений записывается вместе с определенными условиями, устанавливающими способ ее решения. В динамическом моделировании рассматриваются системы уравнений, которые регулируют изменяющиеся во времени взаимодействия переменных. Эта изменчивость предопределяет необходимость периодически решать уравнения для нахождения новых состояний системы.

Для каждого момента времени может существовать специфическая последовательность вычислений, определяемая характером системы уравнений. На рис.26.2 представлена последовательность, используемая в данном случае.

Интервалы времени должны быть достаточно короткими, чтобы можно было принять допущение о постоянстве темпа потока на протяжении интервала, получив при этом удовлетворительное приближение к непрерывно изменяющимся темпам реальной системы. Это означает, что на решения, принятые в начальной точке интервала, не будут влиять изменения, происходящие в течение этого же интервала. Новые значения уровней рассчитываются на конец интервала. По ним определяются новые темпы (решения) для следующего интервала. Ясно, что можно выбрать столь небольшие интервалы времени, что отрезки прямых, проведенных в пределах каждого интервала, будут сколь угодно близко приближаться к любой кривой. Практически возможно выбирать интервал столь короткий, сколь это необходимо. Однако он должен быть таким, чтобы объем вычислений не превышал возможностей современных персональных компьютеров.

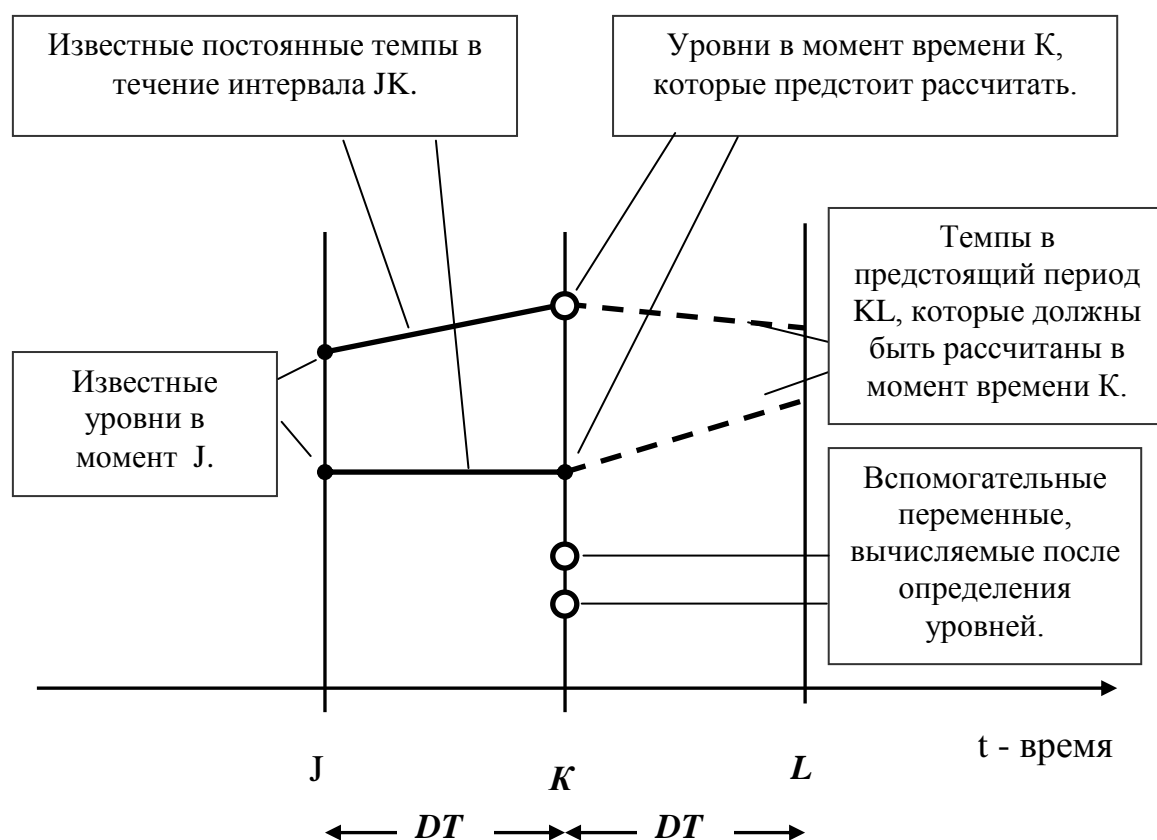


Рис. 26.2. Последовательность вычислений.
(DT – интервалы времени равной длины).

В большинстве динамических моделей допустимый интервал между вычислениями определяется запаздываниями. Запаздывания имеют вид показательной функции. Существует эмпирическое правило выбора интервала. Он должен быть обязательно меньше продолжительности любого запаздывания. Желательно, чтобы он был меньше его половины.

Наилучший способ проверки правильности выбора интервала решений состоит в варьировании его величины и наблюдении за влиянием ее на результаты вычислений.

Особым критерием, определяющим максимальную величину интервала решений, является взаимосвязь между значениями уровней и темпами потоков, входящими в эти уровни и исходящими из них. Интервал решений должен быть достаточно коротким, чтобы суммарный входящий или исходящий поток не вызывал больших изменений в содержании уровня за один интервал решений.

Лекция №34

ХАРАКТЕРИСТИКА ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ.

Индивидуальное моделирование

В отличие от ранее рассмотренных методик построения имитационных моделей будем понимать под индивидуальным моделированием такие разработки имитационных моделей, которые носят сугубо индивидуальный, уникальный характер. Это имитационные модели, разработанные для исследования конкретных систем.

Рассмотрим пример такой имитационной модели, позволяющий исследовать функционирование простейшего склада. Пусть на нем обеспечивается поступление, хранение и выдача потребителю некоторой детали. Для полноты картины будем считать, что все процессы, описывающие поведение склада, носят вероятностный характер. Ясно, что детерминизация какого-либо процесса приведет лишь к упрощению модели.

Введем следующие обозначения (рис.27.1):

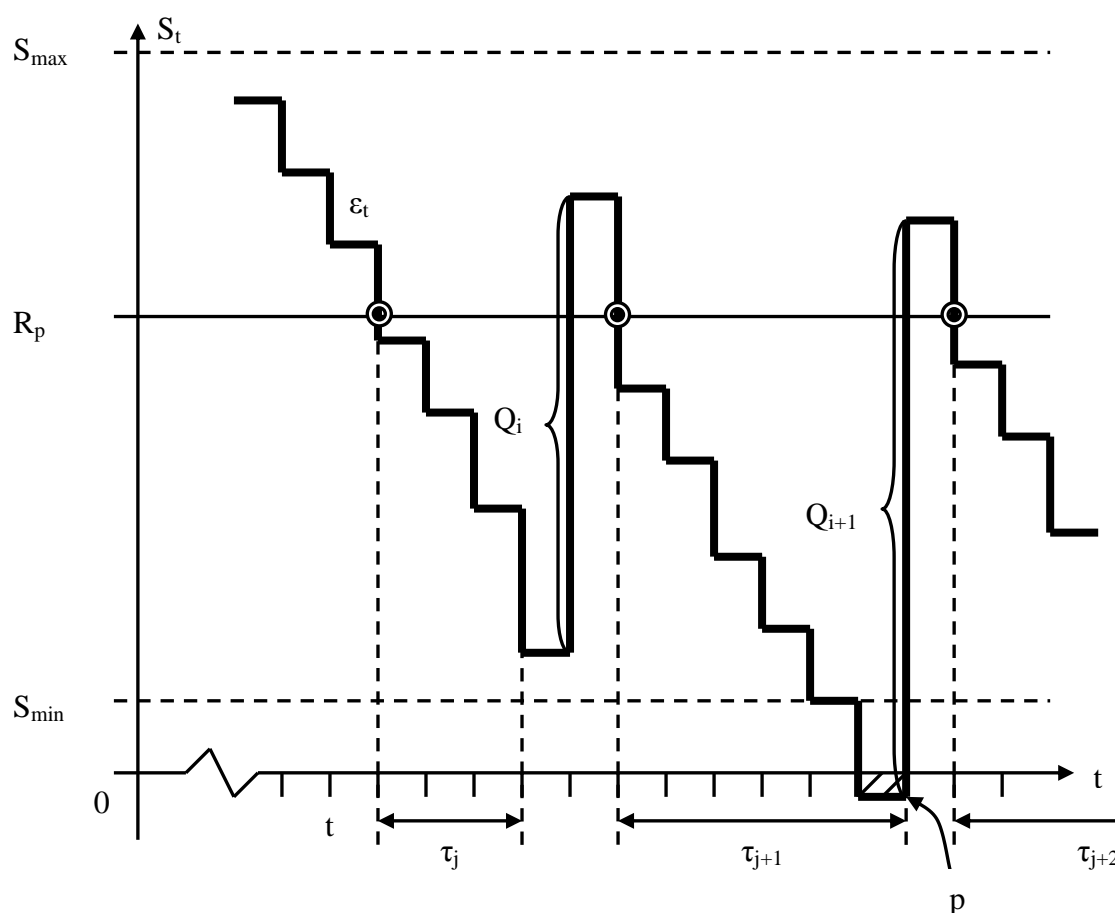


Рис.27.1. Простейший склад.

t - текущее время, $t=1,2,\dots$,

- S_t - состояние склада в момент времени t ,
- S_{\min} - минимально допустимое состояние склада,
- S_{\max} - максимально допустимое состояние склада,
- R_p - сигнальный уровень ($R_p \geq 0$),
- ε_t - спрос на деталь в момент времени t ($\varepsilon_t \geq 0$),
- Q_i - размер поставки деталей от поставщика ($Q_i \geq 0$),
- τ_j - время выполнения заказа на поставку ($\tau > 0$),
- p - вероятность дефицита детали.

При поступлении спроса ε_t в момент времени t состояние склада S_t уменьшается на величину этого спроса. При достижении состоянием склада некоторого сигнального уровня R_p вырабатывается запрос потребителю на поставку партии деталей. Через случайное время τ эта партия размером Q_i поступит на склад и увеличит его состояние. Сигнальный уровень предназначен для управления процессом пополнения содержимого склада. В процессе функционирования склада возможна ситуация дефицита, когда состояние склада S_t может стать отрицательным (в математическом смысле). Это возможно в том случае, если в процессе потребления содержимое склада будет исчерпано, а поставка партии деталей не произошла. Для управления состоянием склада будем использовать параметр p – вероятность дефицита.

Ясно, что система должна быть построена и должна работать так, чтобы, по возможности, избежать дефицита. Очевидно, что при нулевой вероятности дефицита p сигнальный уровень R_p должна равняться бесконечности. Таким образом, ясно, что сигнальный уровень обратно пропорционален вероятности дефицита. С практической точки зрения ограничим сигнальный уровень интервалом

$$S_{\min} \leq R_p \leq S_{\max}.$$

Обратимся к экономической сущности задачи. С этой точки зрения интервал $[S_{\min}, S_{\max}]$ должен быть как можно меньше. Это объясняется тем, что уровни S_{\min} и S_{\max} должны быть как можно меньше, так как они определяют объемы материальных ценностей, не задействованные в процессе производства, то есть характеризуют уровень пролеживающих оборотных средств. Исходя из этого уровни S_{\min} и S_{\max} должны быть устремлены к нулю.

Одновременно, для того, чтобы обеспечить бездефицитное функционирование склада необходимо устремить S_{\min} и S_{\max} к бесконечности.

Таким образом, сигнальный уровень R_p как средняя величина интервала $[S_{\min}, S_{\max}]$ с одной стороны должен быть как можно больше, с другой, - равен нулю.

Сигнальный уровень R_p как параметр, зависящий от случайных явлений (τ_j , Q_i , ε_t), носит также случайный характер. Поэтому для него справедливо понятие доверительного интервала с границами

$$R_p \pm k \cdot \sigma(S_t),$$

где коэффициент k определяет размер доверительного интервала.

Исходя из того, что для интервала $[S_{\min}, S_{\max}]$ известно одно значение - $S_{\min}=0$, можно заключить, что

$$R_p = k \cdot \sigma(S_t). \quad (27.1)$$

Для определения среднеквадратического отклонения состояния склада S_t воспользуемся очевидной формулой

$$S_t = \sum_{i=1}^{i=n_Q} Q_i - \sum_{j=1}^{j=n_\varepsilon} \varepsilon_j,$$

где n_Q – количество поставок за время от 0 до t ,

n_ε – количество спросов за время от 0 до t .

В этом выражении все, входящие в него величины, являются случайными и каждое слагаемое есть сумма случайного числа случайных величин.

Видно, что для суммы (Y) случайного числа (n_x) случайных величин (X_j)

$$Y = \sum_{j=1}^{j=n_x} X_j$$

математическое ожидание определяется выражением

$$M[Y] = M[n_x] \cdot M[X],$$

а среднеквадратическое отклонение

$$\sigma[Y] = \sqrt{D[n_x] \cdot M^2[X] + M[n_x] \cdot D[X]}.$$

Подставив последнее выражение в (4.27)

$$R_p = k \cdot \left(\sqrt{D[n_Q] \cdot M^2[Q] + M[n_Q] \cdot D[Q]} + \sqrt{D[n_\varepsilon] \cdot M^2[\varepsilon] + M[n_\varepsilon] \cdot D[\varepsilon]} \right).$$

А так как мы выяснили, что сигнальный уровень R_p и вероятность дефицита p обратно пропорциональны, то можно полагать $k = 1/p$.

Таким образом,

$$R_p = k \cdot \left(\sqrt{D[n_Q] \cdot M^2[Q] + M[n_Q] \cdot D[Q]} + \sqrt{D[n_\varepsilon] \cdot M^2[\varepsilon] + M[n_\varepsilon] \cdot D[\varepsilon]} \right) \quad (4.28)$$

Отметим, что приведенные выше рассуждения являются единичным и совершенно не характерным способом определения сигнального уровня и параметров работы склада. Более подробные сведения по этому вопросу можно найти в специальной литературе, посвященной системам управления запасами

(ресурсами, материально-техническим снабжением, оперативного планирования и управления производства).

Для полноты описания исследуемой системы следует провести сбор и обработку статистической информации, описывающей поведение случайных процессов спроса (ϵ_t) и поставок (Q_i и τ_j) в реальной системе. Выявленные вероятностные свойства необходимы для воспроизведения случайных чисел ϵ_t , Q_i и τ_j в процессе имитационного эксперимента. С точки зрения системных исследований рассматриваемого объекта сбор реальных данных может и не производиться. Мы можем воспользоваться описанными выше методами воспроизведения случайных чисел с задаваемыми нами, необходимыми для исследования вероятностными свойствами.

Оценка адекватности имитационной модели реальной системе является чрезвычайно важным этапом. Обусловлено это тем впечатлением реальности, которым обладают описываемые модели, и проверка, выполненная без должной тщательности, может привести к тяжелым последствиям.

Проверка соответствия модели и объекта заключается в сравнении интересных для исследователя свойств оригинала и модели.

Для этого необходимо исследовать функциональную или проектируемую систему, что естественно, не всегда возможно. Таким образом, не всегда возможна прямая экспериментальная проверка адекватности свойств модели и объекта.

Вместе с тем, адекватность не следует непосредственно из процесса построения модели. Упрощенная модель не может быть подобна объекту в смысле, обычном для теории подобия: требование пропорциональности сходных параметров и процессов в модели и объекте заведомо не соблюдается из-за различия в числе параметров.

Тем не менее, в литературе рассматриваются различные способы оценки адекватности имитационной модели реальной системы. В частности, предлагается использовать проверки на качество результатов при задании предельных значений исходных данных, на верность исходных предположений и на правильность преобразования информации в модели.

Лекция №35
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
Оптимизация технологических задач

Инженеру – проектировщику приходится решать оптимизационные задачи, так как его работа прежде всего направлена на разработку новых более эффективных производственных систем: технологических процессов и средств их оснащения, прогрессивного оборудования и машин.

Под *математической оптимизацией* обычно понимают совокупность различных математических методов, алгоритмов и программ, направленных на нахождение оптимума функции, наиболее полно характеризующей потребительские свойства рассматриваемого объекта. Такую функцию в теории оптимизации называют *целевой функцией*, а ее аргументы, за счет рационального выбора которых достигают или приближаются к оптимуму называют *проектными параметрами*.

Число проектных параметров может быть различно. Если такой параметр один, тогда оптимизируют функцию одной переменной, – решают задачу одномерной оптимизации. Если проектных параметров несколько, – решается задача многомерной оптимизации. Так как проектные параметры в технологических задачах принимают главным образом вещественные значения, то каждому набору этих значений, можно поставить в соответствие вектор n -мерного евклидова пространства R^n .

Исходя из физического смысла, технико-экономических возможностей в технологических процессах, исследуемые параметры не могут принимать любые численные значения и на них должны быть наложены ограничения.

В результате этого, можно предложить обобщенную математическую формулировку задач оптимизации – найти оптимум функции:

$$Y = F(X), \quad (28.1)$$

в которой $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n -мерный вектор проектных параметров x_i . При условии существования следующих ограничений:

$$\varphi_p(X) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, k; \quad (28.2)$$

$$\psi_r(X) \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, l; \quad (28.3)$$

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (28.4)$$

где k – число ограничений – равенств, l – число ограничений – неравенств, a_i и b_i – границы варьирования проектных параметров x_i , зависящие от конкретных условий задачи.

Если ограничения (28.2) – (28.4) не наложены ($k=0, l=0, a_i=-\infty, b_i=+\infty$), то имеют дело с задачей безусловной оптимизации функции (28.1). В противном случае рассматривают задачу условной оптимизации.

Математические модели связывают входные (независимые) переменные процесса $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемые воздействиями, с выходными (зависимыми) характеристиками $Y(y_1, y_2, \dots, y_m)$ (рис. 3.1), которые обычно именуют откликами, в виде уравнения связи

$$Y=f(X) \quad (3.1)$$

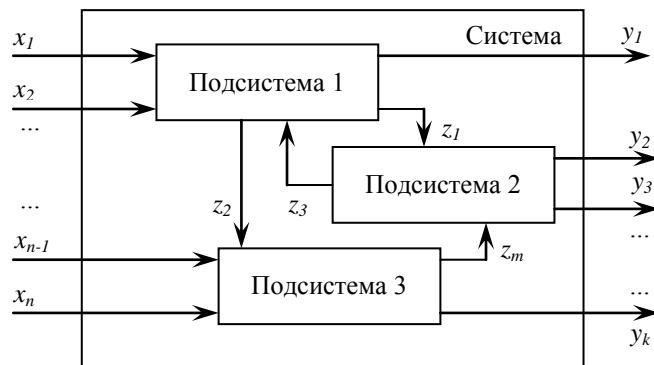


Рис. 3.1. Модель системы детерминированных процессов.

Любому реальному процессу свойственны случайные колебания, вызываемые физической изменчивостью каких-либо факторов $x_i \pm \Delta x_i(\tau)$ или внешними случайными воздействиями. В силу этого при равном среднем значении входных характеристик $X(\tau)$ в моменты τ_1 и τ_2 выходные параметры $Y(\tau)$, будут неодинаковыми (рис.3.2). Поэтому для вероятностных процессов, где по сравнению с $x_i(\tau)$ нельзя пренебречь случайными колебаниями $\Delta x_i(\tau)$ и

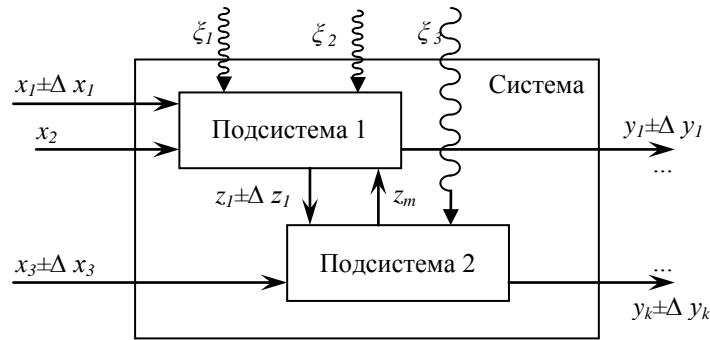


Рис.3.2. Модель системы стохастических процессов

случайными внешними воздействиями $\xi_j(\tau)$, необходимо характеризовать систему с учетом статистического закона распределения мгновенных значений $Y(\tau)$ относительно средней величины $Y_{cp}(\tau)$ уравнением

$$Y(\tau) = Y_{cp}(\tau) \pm \Delta Y(\tau) = f(X_{cp}) + \zeta(\Delta X, \xi) \quad (3.2)$$

Модели, отображающие случайный (стохастический) характер параметров и факторов системы, называются *статистическими* или *стохастическими* в отличие от *детерминированных*, не учитывающих вероятностных характеристик процессов.

По мере уменьшения величины параметров ΔX и ξ уравнение (3.2) приближается по структуре к уравнению (1.1), описывающему детерминированные системы.

Обычно детерминированные модели (3.1), представляющие собой систему уравнений, удастся составить только в тех случаях, когда о процессах в описываемой системе имеются ясные физические представления и эти представления можно формализовать. В таких случаях говорят, что система представляет собой «белый ящик» - объект с известной структурой и функциями.

Однако получаемая таким образом модель может оказаться громоздкой, а ее информационное обеспечение весьма трудоемким. Поэтому часто используют статистические модели для описания детерминированных систем. В таких случаях рассматривают систему как «черный ящик» с неизвестной структурой, в котором доступны для изучения только контролируемые входные параметры X и измеримые выходные характеристики Y . Получив таблицу соответствий $\{x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n\}$, принимают их за случайную выборку из генеральной статистической совокупности $\{X, Y\}$ и описывают соотношением (3.2). Полученная статистическая модель при соответствующей интерпретации результатов позволяет раскрыть механизм, сделать «белыми» некоторые части устройства и функционирования «черного ящика».

Детерминированные модели (3.1), могут также использоваться для описания стохастических систем, если объектом изучения являются их усредненные характеристики. Таким образом, статистические модели являются более широким классом моделей и включают детерминированные модели как предельный частный случай, в котором выходные параметры Y однозначно определяются входными переменными X .

Соотношения (3.1) и (3.2) являются математическими моделями процессов, приближенно описывающими происходящие в системе изменения. Если доказано подобие натуральных и моделирующих процессов, то можно говорить об *адекватности моделей*.

В зависимости от характера и пространственной структуры описываемых систем различаются модели с *распределенными* и *сосредоточенными параметрами*. В связи с различной интенсивностью моделируемых процессов во времени различают: *статические модели*, описывающие установившиеся процессы вблизи состояния равновесия; *стационарные модели*, характеризующие постоянством основных параметров во времени; *динамические модели* систем, в которых входной переменной процесса является время.

В зависимости от конкретного вида применяемого математического аппарата, различают модели матричные, сетевые, дифференциальные, интегральные, алгоритмические, программные и др.

Лекция №36**БЕЗУСЛОВНЫЕ ОПТИМИЗАЦИЯ ОДНО ПЕРЕМЕННЫЕ ФУНКЦИИ.**

Нахождение оптимума функции одной переменной $f(x)$ при наложении ограничений типа (28.4) не вызывает затруднений и сводится к нахождению значений $f(x)$ в точках a и b , корней уравнения $f'(x)=0$ (т. е. точек подозрительных на экстремум), а также анализу поведения $f'(x)$ в окрестностях этих точек, либо исследованию в них знаков старших производных.

Для многих конкретных задач одномерной оптимизации рационально использовать численные методы нахождения экстремумов. В ряде случаев, когда исходя из физической сущности рассматриваемой задачи известно, что функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет единственный экстремум целесообразно применять методы исключения интервалов. Основное достоинство методов исключения интервалов – отсутствие необходимости в информации о гладкости исследуемой целевой функции. Недостатком является отсутствие учета величин разностей между вычисляемыми значениями целевой функции, так как это позволило бы ускорить поиск оптимума функции.

В теории математической оптимизации разработан ряд методов позволяющих учитывать эту информацию, однако они требуют от целевой функции определенной степени гладкости.

Наиболее просты в применении методы оптимизации, основанные на *полиномиальной аппроксимации* целевой функции. Идея этих методов состоит в вычислении значений целевой функции в ряде точек исследуемого отрезка и построении на основе результатов таких вычислений аппроксимирующего полинома, чаще всего для этого используется квадратичная экстраполяция. Далее разыскивают оптимум построенного полинома и отождествляют полученное значение с искомым оптимумом целевой функции.

Математические модели связывают входные (независимые) переменные процесса $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемые воздействиями, с выходными (зависимыми)

характеристиками $Y(y_1, y_2, \dots, y_m)$ (рис. 3.1), которые обычно именуют откликами, в виде уравнения связи

$$Y=f(X) \quad (3.1)$$

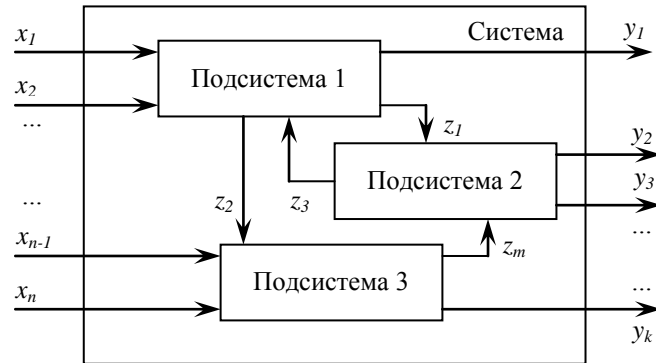


Рис. 3.1. Модель системы детерминированных процессов.

Любому реальному процессу свойственны случайные колебания, вызываемые физической изменчивостью каких-либо факторов $x_i \pm \Delta x_i(\tau)$ или внешними случайными воздействиями. В силу этого при равном среднем значении входных характеристик $X(\tau)$ в моменты τ_1 и τ_2 выходные параметры $Y(\tau)$, будут неодинаковыми (рис.3.2). Поэтому для вероятностных процессов, где по сравнению с $x_i(\tau)$ нельзя пренебречь случайными колебаниями $\Delta x_i(\tau)$ и

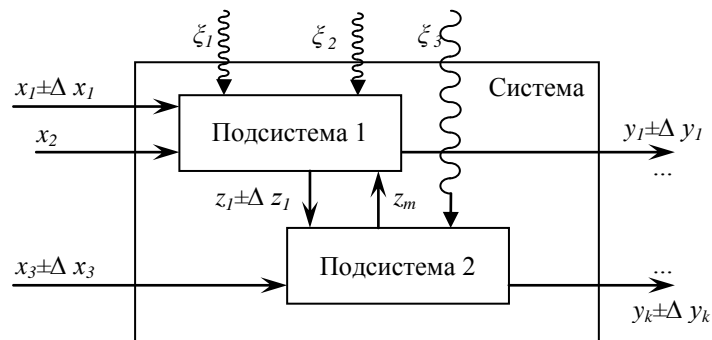


Рис.3.2. Модель системы стохастических процессов

случайными внешними воздействиями $\xi_j(\tau)$, необходимо характеризовать систему с учетом статистического закона распределения мгновенных значений $Y(\tau)$ относительно средней величины $Y_{cp}(\tau)$ уравнением

$$Y(\tau) = Y_{cp}(\tau) \pm \Delta Y(\tau) = f(X_{cp}) + \zeta(\Delta X, \xi) \quad (3.2)$$

Модели, отображающие случайный (стохастический) характер параметров и факторов системы, называются *статистическими* или *стохастическими* в отличие от *детерминированных*, не учитывающих вероятностных характеристик процессов.

По мере уменьшения величины параметров ΔX и ξ уравнение (3.2) приближается по структуре к уравнению (1.1), описывающему детерминированные системы.

Обычно детерминированные модели (3.1), представляющие собой систему уравнений, удастся составить только в тех случаях, когда о процессах в описываемой системе имеются ясные физические представления и эти представления можно формализовать. В таких случаях говорят, что система представляет собой «белый ящик» - объект с известной структурой и функциями.

Однако получаемая таким образом модель может оказаться громоздкой, а ее информационное обеспечение весьма трудоемким. Поэтому часто используют статистические модели для описания детерминированных систем. В таких случаях рассматривают систему как «черный ящик» с неизвестной структурой, в котором доступны для изучения только контролируемые входные параметры X и измеримые выходные характеристики Y . Получив таблицу соответствий $\{x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n\}$, принимают их за случайную выборку из генеральной статистической совокупности $\{X, Y\}$ и описывают соотношением (3.2). Полученная статистическая модель при соответствующей интерпретации результатов позволяет раскрыть механизм, сделать «белыми» некоторые части устройства и функционирования «черного ящика».

Детерминированные модели (3.1), могут также использоваться для описания стохастических систем, если объектом изучения являются их усредненные характеристики. Таким образом, статистические модели являются более широким классом моделей и включают детерминированные модели как предельный частный случай, в котором выходные параметры Y однозначно определяются входными переменными X .

Соотношения (3.1) и (3.2) являются математическими моделями процессов, приближенно описывающими происходящие в системе изменения. Если доказано подобие натуральных и моделирующих процессов, то можно говорить об *адекватности моделей*.

В зависимости от характера и пространственной структуры описываемых систем различаются модели с *распределенными* и *сосредоточенными параметрами*. В связи с различной интенсивностью моделируемых процессов во времени различают: *статические модели*, описывающие установившиеся процессы вблизи состояния равновесия; *стационарные модели*, характеризующие постоянством основных параметров во времени; *динамические модели* систем, в которых входной переменной процесса является время.

В зависимости от конкретного вида применяемого математического аппарата, различают модели матричные, сетевые, дифференциальные, интегральные, алгоритмические, программные и др.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Юсупбеков Н.Р., Мухитдинов Д.П., Базаров М.Б. Электрон ҳисоблаш машиналарини кимё технологиясида қўллаш. Олий ўқув юртлари учун дарслик. –Т.: Фан, 2010.
2. Моделирование систем: Учебное пособие. Под ред. Б. Я. Советова. -М. Высшая школа. 1985.
3. Имитационное моделирование производственных систем /Под ред. А.А. Вавилова. -М.: Машиностроение, 1983.
4. Юсупбеков Н.Р. Математическое моделирование технологических процессов. Ўқув қўлланма. - ТошДУ.: 1989.
5. Кафаров В.В. Математическое моделирование основных процессов химической технологии. - М.: Высшая школа. 1999.
6. Юсупбеков Н.Р., Мухитдинов Д.П., Базаров М.Б., Халилов Ж.А. Бошқариш системаларини компютерли моделлаштириш асослари. Олий ўқув юртлари учун ўқув қўлланма. –Н.: Навоий-Голд-Сервес, 2009.
7. Игамбердиев Х.З., Юсупбеков А.Н., Зарипов О.О. Регулярные методы оценивания и управления динамическими объектами в условиях неопределенности. – Т.: ТашГТУ, 2012. - 320 с.
8. Юсупбеков Н.Р., Гулямов Ш.М., Маннанов У.В. Моделирование совмещенных реакционно-разделительных процессов. –Т.: ТашГТУ, 1999.
9. Юсупбеков Н.Р., Адиллов Ф.Т., Хилалова С.Ш. Построение компьютерных тренажеров для подготовки операторов технологических процессов и производств. –Т.: ТашГТУ, 2004.

<http://www.ziyonet.uz>.

<http://www.allbest.ru>.