

Ein Vergleich expliziter algebraischer Reynolds-Spannungsmodelle

Von der Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte

DISSERTATION

von

Volker Bäumer

aus Herford

Eingereicht am: 23. Januar 1998

Mündliche Prüfung am: 20. Mai 1999

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. R. Leithner
Prof. Dr.-Ing. M. Peric

Berichte aus der Strömungstechnik

Volker Bäumer

**Ein Vergleich expliziter algebraischer
Reynolds-Spannungsmodelle**

Shaker Verlag
Aachen 2000

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Bäumer, Volker:

Ein Vergleich expliziter algebraischer Reynolds-Spannungsmodelle /

Volker Bäumer. - Als Ms. gedr. - Aachen : Shaker, 2000

(Berichte aus der Strömungstechnik)

Zugl.: Braunschweig, Techn. Univ., Diss., 1999

ISBN 3-8265-6979-2

Copyright Shaker Verlag 2000

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISBN 3-8265-6979-2

ISSN 0945-2230

Shaker Verlag GmbH • Postfach 1290 • 52013 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • eMail: info@shaker.de

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Raumflug- und Reaktortechnik der TU Braunschweig und während meiner Zeit als Doktorand beim European Southern Observatory in Garching.

Allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, möchte ich an dieser Stelle herzlich danken.

Mein besonderer Dank gilt dabei Herrn Prof. Dr.-tech. R. Leithner, ohne dessen Unterstützung diese Arbeit wohl nie zu einem erfolgreichen Abschluß gekommen wäre. Mein Dank gilt weiterhin Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Peric für die Übernahme des zweiten Berichtes und Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Schwedes für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Besonders herzlich bedanke ich mich bei Herrn Michael Schneermann und Herrn Franz Koch für ihre große Unterstützung während meiner Zeit bei der ESO. Diesen und allen meinen nicht namentlich erwähnten Kollegen bei der ESO danke ich für die Freundschaft, die mir zu Teil wurde. Ich werde mich immer gerne an die Zeit zurückerinnern.

Meinen Kollegen und allen Mitarbeitern des Institutes für Raumflug- und Reaktortechnik möchte ich für den kollegialen und freundschaftlichen Zusammenhalt danken, der mir sehr geholfen hat und den ich sicher nicht so schnell vergessen werde.

Ismaning, im Juni 1999

Volker Bäumer

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	iii
1 Einleitung	1
2 Herleitung der Turbulenzmodelle	3
2.1 Massen- und Impulsbilanz	3
2.2 Das Standard k - ϵ -Modell	4
2.3 Deformations- und Rotationstensor	5
2.4 Transportgleichung der Reynoldsschen Spannungen	5
2.5 Druck-Scher-Korrelation	6
2.6 Implizite algebraische Reynolds-Spannungsmodelle	9
2.6.1 Der Ansatz von Gatski und Speziale	9
2.6.2 Der Ansatz von Taulbee	10
2.6.3 Bemerkungen zur impliziten Struktur der Modelle	11
2.7 Explizite algebraische Reynolds-Spannungsmodelle	12
2.7.1 Reihenansatz für die turbulenten Spannungen	12
2.7.2 Semi-explizite Lösung von Pope	13
2.7.3 Linearisiertes und regularisiertes Modell von Gatski und Speziale	14
2.7.4 Explizite Lösung von Girimaji	15
2.8 Konstitutive Gleichungen	16
2.8.1 Modelle mit konstanten Koeffizienten	17
2.8.2 Realizability	18
2.8.3 Das Modell von Shih, Zhu und Lumley	18
2.8.4 Lineares Modell von Shih et al	19
2.9 Modellierung der Dissipationsgleichung	20
2.9.1 Das RNG-Modell	21
2.9.2 Das Modell von Shih et al	22
2.10 Zusammenfassung der Modelle	22
3 Elementare Eigenschaften der Modelle	25
3.1 Homogene Scherströmungen	25
3.1.1 Bilanzgleichungen	25
3.1.2 Evolution der Turbulenzenergie	26
3.1.3 Asymptotisches Verhalten der Modelle	27
3.2 Ungleichgewichtszustände	30
3.3 Anisotropie der turbulenten Normalspannungen	32
3.3.1 Ebene Kanalströmung	32
3.3.2 Sekundärströmungswirbel in einem quadratischen Kanal	34
3.4 Kopplung der turbulenten Spannungen	38
3.5 Turbulenzproduktion	40
3.5.1 Strömungen mit starker Umlenkung	40
3.5.2 Rezirkulationszonen	45
3.6 Diskussion der Modelle	47

4	Verifikation der Turbulenzmodelle	50
4.1	Strömung über eine zurückspringende Stufe	50
4.1.1	Beschreibung des Strömungsproblems	50
4.1.2	Literaturübersicht	51
4.1.3	Fehlerbetrachtung	52
4.1.4	Darstellung der Ergebnisse	55
4.1.5	Diskussion der Ergebnisse	61
4.2	Strömung über einen 2-dimensionalen Hügel	62
4.2.1	Beschreibung des Strömungsproblems	62
4.2.2	Literaturübersicht	63
4.2.3	Beschreibung der numerischen Berechnung	64
4.2.4	Darstellung der Ergebnisse	65
5	Zusammenfassung	68
A	Beschreibung des numerischen Verfahrens	74
A.1	Diskretisierung der Bilanzgleichungen	74
A.2	Implementierung der Turbulenzmodelle	77
A.3	Randbedingungen	79
B	Abbildungen zu Kapitel 2	84
C	Abbildungen zu Kapitel 3	84
D	Abbildungen zu Kapitel 4	109
D.1	Ergebnisse der Strömung über eine zurückspringende Stufe	109
D.2	Ergebnisse der Umströmung des 2-dimensionalen Hügels	146

Nomenklatur

Lateinische Großbuchstaben

U	m/s	zeitlicher Mittelwert der Geschwindigkeit
C_i		Koeffizient der nichtlinearen Modelle
C_μ		Koeffizient (Gl.2.6)
G_λ		Koeffizient (Gl.2.38)
H	m	Stufenhöhe, Höhe des Hügels
P_{ij}		Produktionsterm der turbulenten Spannungen (Gl.2.11)
P_k		Produktionsterm der Turbulenzenergie (Gl.2.2)
P	N/m^2	Druck
S	$1/s$	Scherdeformation
S_{ij}	$1/s$	Deformationstensor (Gl.2.9)
T^λ		Tensor (Gl.2.38)
W_{ij}	$1/s$	Rotationstensor (Gl.2.9)

Lateinische Kleinbuchstaben

b_{ij}		Anisotropietensor (Gl.2.14)
k	m^2/s^2	kinetische Energie der Turbulenz
t	s	Zeit
t^*		dimensionslose Zeit ($= t S$)
u	m/s	turbulente Geschwindigkeitsschwankungen
u_τ	m/s	Wandschubspannungsgeschwindigkeit ($= \sqrt{\tau_w/\rho}$)
$\overline{u_i u_j}$	m^2/s^2	turbulente Spannungen
x	m	Koordinate
y	m	Koordinate
y^+		dimensionsloser Wandabstand ($= \rho y u_\tau / \mu$)
z	m	Koordinate

Griechische Buchstaben

α	$grad$	Winkel
ϵ	m^2/s^3	Dissipation
ϵ_{ijm}		alternierender Einheitstensor
ρ	kg/m^3	Dichte
μ	$kg/(ms)$	dynamische Viskosität
μ_τ	$kg/(ms)$	Wirbelviskosität
Ω_m	$1/s$	Winkelgeschwindigkeit
η		dimensionslose Invariante des Deformationstensors (Gl.2.10)
ξ		dimensionslose Invariante des Rotationstensors (Gl.2.10)
σ	$1/s$	Invariante des Deformationstensors
τ	s	makroskopisches Zeitmaß der Turbulenz
τ_w	N/m^2	Wandschubspannung
ψ	m^2/s	Stromfunktion

Indizes

c	wandnaher Knoten
i	Koordinatenrichtung
j	Koordinatenrichtung
i, j	Ableitung der Komponente i nach j
k	Turbulenzenergie
m	Mittelwert, Koordinate
R	Wiederanlegepunkt (Reattachment)
Ref	Referenzwert, Bezugsgröße
S	Ablösepunkt (Separation)
*	normierte Variable
∞	Grenzwert

Mathematische Operatoren

D	substantielle Ableitung
∂	partielle Ableitung
Δ	Differenz
∇	Nabla-Operator

1 Einleitung

Turbulente Strömungen spielen in vielen technischen Anwendungen eine wichtige Rolle. So wird einerseits der Wirkungsgrad von Wärmetauschern durch die turbulente Vermischung erheblich verbessert, andererseits hat die Turbulenz eine Erhöhung des Druckverlustes zur Folge. In Brennkammern ist die Turbulenz verantwortlich für die Durchmischung von Brennstoff und Sauerstoffträger, in Chemiereaktoren für die Vermischung der an der Reaktion beteiligten Stoffe. Aerodynamische Fragestellungen findet man vor allem im Flugzeug-, Strömungsmaschinen- und Fahrzeugbau. Dort interessieren vor allem Widerstands- und Auftriebsbeiwerte, die ebenfalls stark durch die Turbulenz der Strömung beeinflusst werden. Auch das Auftreten einer Strömungsablösung hängt ganz wesentlich vom Turbulenzgrad der Strömung ab. In Strömungsmaschinen verursacht die Ablösung einen Leistungsverlust, bei der Umströmung eines Tragflügels ein Zusammenbrechen des Auftriebs. Ganz allgemein wird durch eine Ablösung der Impuls-, Wärme- und Stofftransport erhöht und es hängt vom Anwendungsfall ab, ob dies erwünscht ist oder nicht.

Das k - ϵ -Turbulenzmodell ist das bei weitem am häufigsten verwendete Turbulenzmodell. Der Erfolg dieses Turbulenzmodells ist auf seine relativ hohe numerische Stabilität, seine vergleichsweise universelle Einsetzbarkeit und einfache Handhabung zurückzuführen. Es basiert jedoch auf sehr weitgehenden physikalischen Vereinfachungen, die in vielen Anwendungen ingenieurtechnisch inakzeptabel schlechte Ergebnisse zur Folge haben.

In wissenschaftlichen Publikationen und in Prospekten kommerzieller Programmanbieter werden daher immer häufiger differentielle Reynolds-Spannungsmodelle propagiert, die zumindest strukturell alle turbulenten Transportprozesse berücksichtigen und daher von größerer Allgemeingültigkeit sind. Nachteilig ist an diesen Modellen jedoch der ungleich höhere numerische Aufwand, der eine Anwendung dieser Modelle nur in Ausnahmefällen zuläßt. Zudem ist häufig unklar, ob die erzielbaren technischen Verbesserungen diesen Aufwand rechtfertigen. Es ist meist sinnvoller, die Berechnung mit einem einfacheren Turbulenzmodell, dafür aber guter numerischer Auflösung des Strömungsfeldes durchzuführen, als umgekehrt.

Der Erfolg einer numerischen Simulation hängt aber keineswegs nur vom Turbulenzmodell ab. Im Unterschied zu rein wissenschaftlichen Arbeiten, in denen meist sehr einfache Strömungsgeometrien behandelt werden, müssen in der industriellen Anwendung oft geometrisch komplizierte Strömungsprobleme untersucht werden. Die exakte Modellierung der Geometrie und die hinreichende numerische Auflösung des Strömungsfeldes sind Voraussetzung für eine zuverlässige Strömungsberechnung. Vor diesem Hintergrund sind numerische Stabilität und Effizienz des Turbulenzmodells auch bei schlechter numerischer Auflösung des Strömungsgebietes und stark verzerrten numerischen Netzen entscheidend für die Eignung des Modells für industrielle Anwendungen.

Diese Beobachtungen führten seit etwa 1990 vor allem in den USA zu der Entwicklung sogenannter expliziter algebraischer Reynolds-Spannungsmodelle. Diese Modelle könnte man auch als nichtlineare k - ϵ -Modelle bezeichnen, um die Verwandtschaft mit dem Standard k - ϵ -Modell zu verdeutlichen. Sie unterscheiden sich vom Standard k - ϵ -Modell in zweierlei Hinsicht. Zum einen sind die Modellkoeffizienten vom lokalen Strömungsfeld

abhängige Größen. Zum anderen wird die lineare Beziehung zwischen den turbulenten Spannungen und dem Geschwindigkeitsfeld durch eine etwas komplexere und allgemeingültigere nichtlineare Beziehung ersetzt. Viele der dem k - ϵ -Modell anhaftenden Probleme werden auf die ungeeignete Modellierung der Dissipationsgleichung zurückgeführt. Im Zuge der oben genannten Entwicklungen sind auch einige alternative Modellierungen der Dissipationsgleichung vorgeschlagen worden, die in einzelnen Anwendungen signifikante Verbesserungen gebracht haben.

Diese neuen Modelle sind jedoch bislang nur sporadisch zur Berechnung komplexer turbulenter Strömungen verwendet worden. Sie befinden sich noch im Stadium der Entwicklung und eine systematische Untersuchung dieser Modelle auf Basis des gleichen numerischen Verfahrens fehlt völlig. Letzteres ist aber für eine eindeutige Beurteilung der Modelle unbedingt erforderlich. Hinsichtlich der tatsächlich erzielbaren Verbesserungen und deren physikalischen Ursprungs findet man in der Literatur nur sehr ungenaue und ebenfalls widersprüchliche Angaben. Ein vor allem in der industriellen Anwendung wichtiger Aspekt ist der der numerischen Stabilität und Effizienz. Diese hängen natürlich vom numerischen Verfahren ab, so daß diesbezügliche Angaben in der Literatur nur bedingt auf andere numerische Verfahren übertragbar sind.

Zielsetzung der vorliegenden Arbeit ist die Umsetzung dieser neusten Entwicklungen in die industrielle Anwendung. Angesichts des skizzierten Entwicklungsstandes erfordert dies offensichtlich eine grundlegende und vor allem systematische Untersuchung dieser neuen Modellgeneration.

Dazu werden in einem ersten Schritt die neuen Modelle systematisch aus den Transportgleichungen der turbulenten Spannungen abgeleitet und in einheitlicher Form dargestellt. In einem zweiten Schritt werden die elementaren Eigenschaften der Modelle diskutiert. Dabei werden Strömungsprobleme behandelt, die eine isolierte Untersuchung einzelner physikalischer Aspekte ermöglichen. Auf diese Weise wird herausgearbeitet, inwieweit die neuen Modelle die Physik turbulenter Strömungen genauer beschreiben. Erst im dritten Schritt werden die neuen Modelle dann auf zwei sehr komplexe Strömungsprobleme angewendet, in denen sich die einzelnen physikalischen Aspekte überlagern. Dies ist zum einen der klassische Testfall der Strömung über eine zurückspringende Stufe und zum anderen die ablösende Strömung über einen 2-dimensionalen Hügel. Da das numerische Verfahren einen erheblichen Einfluß auf die Lösung hat, werden die Ergebnisse sorgfältig mit experimentellen Daten und anderen numerischen Arbeiten verglichen.

Die vorliegende Arbeit erfolgte in Zusammenarbeit mit der ANSYS, INC, USA, deren CFD-Code FLOTRAN zur Untersuchung dieser neuen Generation expliziter algebraischer Reynolds-Spannungsmodelle eingesetzt wurde.

2 Herleitung der Turbulenzmodelle

In dieser Arbeit werden algebraische Reynolds-Spannungsmodelle untersucht. Algebraisch bezieht sich dabei auf den Zusammenhang zwischen turbulenten Spannungen und lokalem Geschwindigkeitsfeld (Deformationsfeld). Gemeinsam ist allen algebraischen Reynolds-Spannungsmodellen, daß die Spannungen eine lokale Funktion der Geschwindigkeitsgradienten $U_{i,j}$, der Turbulenzenergie k und der Dissipation ϵ sind

$$\overline{u_i u_j} = f(U_{i,j}, k, \epsilon) . \quad (2.1)$$

Die Turbulenzenergie und die Dissipation dienen dabei zur Charakterisierung der lokalen Turbulenzstruktur, sie werden durch Lösung ihrer Bilanzgleichungen bestimmt. Die Bilanzgleichung der Turbulenzenergie ist mit den turbulenten Spannungen über den Produktions-term gekoppelt

$$P_k = -\overline{u_i u_j} U_{i,j} , \quad (2.2)$$

so daß die Formulierung der Spannungs-Deformations-Beziehung auch in die Charakterisierung der lokalen Turbulenzstruktur eingeht. Die Modellierung der k -Transportgleichung ist ansonsten relativ unkritisch. Problematisch ist hingegen die Modellierung der Dissipationsgleichung, die zum Teil auf sehr weitgehenden Modellierungsannahmen beruht.

Im folgenden sind daher zwei verschiedene Aspekte zu unterscheiden. Zunächst wird die Entwicklung algebraischer Spannungs-Deformations-Beziehungen besprochen. Diese werden sukzessive aus der Transportgleichung der turbulenten Spannungen gewonnen oder basieren auf sogenannten konstitutiven Gleichungen. Beiden Methoden liegen die gleichen physikalischen Annahmen zugrunde. Der zweite Teil beschäftigt sich dann mit der Modellierung der Dissipationsgleichung, die, wie sich zeigen wird, nicht zwangsläufig an die Modellierung der Spannungs-Deformations-Beziehung gekoppelt ist.

Im Sinne der obigen Definition zählt auch das Standard k - ϵ -Modell zur Klasse der algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle. Es wird sich zeigen, daß das k - ϵ -Modell in der Hierarchie der algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle ganz am Ende steht, es basiert auf den jeweils weitestgehenden physikalischen Annahmen.

Hingewiesen sei an dieser Stelle noch auf eine wegweisende Arbeit von GATSKI und SPEZIALE [GS92], die einige der hier dargestellten Zusammenhänge erstmals aufgezeigt haben.

Alle Gleichungen werden in Tensornotation angegeben, wobei von der Einsteinschen Summationskonvention Gebrauch gemacht wird, d.h. über mehrfach in einem Term auftretende Indizes ist zu summieren.

2.1 Massen- und Impulsbilanz

In dieser Arbeit werden ausschließlich inkompressible Strömungen mit konstanter Dichte behandelt. Nach Einführung der Reynoldsschen Mittelung lautet die Massen- und Impulsbilanz wie folgt:

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho u_i u_j} \quad (2.4)$$

Die in der Impulsbilanz auftretenden Korrelationen $\overline{u_i u_j}$ bezeichnet man als turbulente Spannungen oder auch als Reynoldssche Spannungen, deren Berechnung ist Aufgabe des Turbulenzmodells.

2.2 Das Standard k - ϵ -Modell

Das Standard k - ϵ -Modell wurde ursprünglich aus einer Analogie zum Newtonschen Schubspannungsansatz entwickelt. Die turbulenten Spannungen sind demnach eine Funktion der lokalen Geschwindigkeitsgradienten

$$\overline{\rho u_i u_j} = -\mu_\tau \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.5)$$

mit dem Proportionalitätsfaktor μ_τ , den man als Wirbelviskosität oder auch turbulente Viskosität bezeichnet. Auf diese Weise wird der turbulente Impulstransport, der streng genommen ein konvektiver Transportvorgang ist, durch einen diffusiven Ansatz modelliert.

Auf diesen diffusiven Ansatz sind die relativ angenehmen numerischen Eigenschaften des k - ϵ -Modells zurückzuführen. Die Turbulenz wirkt so, als ob sich die Viskosität des Fluides lokal vergrößert. Dadurch wird die numerische Stabilität und Effizienz des iterativen Lösungsvorganges erheblich verbessert.

Nach einer Idee von JONES und LAUNDER [JL72] bestimmt man die Wirbelviskosität wiederum aus der Turbulenzenergie und der Dissipation

$$\mu_\tau = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (2.6)$$

wobei C_μ ein empirisch anzupassender Koeffizient ist. Die Turbulenzenergie und die Dissipation erhält man aus den entsprechenden Transportgleichungen, die hier in ihrer Standardmodellierung angegeben sind.

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \rho P_k - \rho \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.7)$$

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \rho C_{\epsilon,1} \frac{\epsilon}{k} P_k - \rho C_{\epsilon,2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \quad (2.8)$$

Die Modellierung der k -Gleichung bereitet relativ wenig Probleme, da Modellannahmen lediglich im Diffusionsterm erforderlich sind, die wiederum vergleichsweise unkritisch sind.

Die angegebene Standardmodellierung der Dissipationsgleichung basiert auf einer Analogie zur Bilanzgleichung der Turbulenzenergie, wobei der Produktions- und Dissipationsterm

aus Dimensionsgründen mit ϵ/k , und zur Anpassung an reale Strömungen zusätzlich mit den Koeffizienten $C_{\epsilon,1}$ bzw. $C_{\epsilon,2}$ multipliziert werden. Die Modellierung der ϵ -Gleichung beruht also eher auf Intuition, denn auf einer strikten Herleitung.

Die in diesem Modell auftretenden Koeffizienten wurden empirisch an eine Reihe einfacher Strömungen angepaßt. Üblicherweise werden die folgenden Koeffizienten verwendet:

$$C_\mu = 0.09 \quad C_{\epsilon,1} = 1.44 \quad C_{\epsilon,2} = 1.92 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\epsilon = 1.3$$

Angemerkt sei an dieser Stelle, daß die im folgenden noch herzuleitenden algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle alle auf Basis dieses Standard k - ϵ -Modells entwickelt wurden.

2.3 Deformations- und Rotationstensor

Den Quotienten aus Turbulenzenergie und Dissipation $\tau = k/\epsilon$ bezeichnet man als makroskopisches Zeitmaß, er gibt die mittlere Lebensdauer eines Turbulenzwirbels an. Definiert man ferner den symmetrischen Deformationstensor S_{ij} und den antisymmetrischen Rotationstensor W_{ij}

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.9)$$

so kann man dimensionslose Invariante dieser Tensoren der folgenden Form angeben

$$\eta = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad \xi = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{2W_{ij}W_{ij}}. \quad (2.10)$$

Interpretiert man den Ausdruck $1/\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ als Zeit, die für die Entstehung eines Turbulenzwirbels benötigt wird, so gibt die Invariante η die auf die mittlere Entstehungszeit bezogene charakteristische Lebensdauer eines Turbulenzwirbels an. Man kann η auch als mittlere Deformation deuten, die ein Turbulenzwirbel in seiner Lebenszeit erfährt.

Es ist offensichtlich, daß η und ξ sinnvolle Parameter zur Charakterisierung der lokalen Turbulenzstruktur sind. Diese Parameter dienen im folgenden dazu, die in den Modellen auftretenden Koeffizienten an die lokale Turbulenzstruktur anzupassen.

Kritisch anzumerken ist jedoch, daß sie die lokale Deformation lediglich betragsmäßig enthalten ($S_{ij}S_{ij} = S_{11}^2 + S_{12}^2 + \dots \geq 0$), also nicht zwischen unterschiedlichen Vorzeichen unterschieden werden kann. So wird η in einem divergierenden Kanal den gleichen Wert aufweisen wie in einem konvergierenden Kanal, obwohl die axiale Beschleunigung bzw. Verzögerung sehr unterschiedliche Auswirkungen auf die Turbulenz haben. Es ist im Einzelfall darauf zu achten, ob die lokale Turbulenzstruktur tatsächlich durch η und ξ charakterisiert werden kann.

2.4 Transportgleichung der Reynoldsschen Spannungen

Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen sind die Transportgleichungen der turbulenten Spannungen, wie sie z.B. in [Hin75, Rod70] gegeben sind:

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = P_{ij} - \epsilon_{ij} + \Phi_{ij} + D_{ij} - 2\Omega_m (e_{mkj}\overline{u_i u_k} + e_{mki}\overline{u_j u_k}) , \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} P_{ij} &= -\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \\ \epsilon_{ij} &= 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \\ D_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \right] \\ \Phi_{ij} &= \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

wobei P_{ij} der Produktions-, D_{ij} der Diffusions- und ϵ_{ij} der Dissipationsterm ist. Der Dissipationsterm wird üblicherweise in einen isotropen und deviatorischen Teil aufgespalten

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} - \epsilon_{ij}^D , \quad (2.12)$$

wobei letzterer üblicherweise zusammen mit der Druck-Scher-Korrelation Φ_{ij} modelliert wird

$$\Pi_{ij} = \Phi_{ij} - \epsilon_{ij}^D . \quad (2.13)$$

Der letzte Term in Gleichung (2.11) stellt die Corioliskräfte dar und Ω_m ist die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Systems.

Für die folgenden Betrachtungen ist es sinnvoll, in die Transportgleichung den Anisotropietensor

$$b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}}{2k} \quad (2.14)$$

einzuführen. Unter Verwendung der Transportgleichung der Turbulenzenergie

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \epsilon + D_k , \quad (2.15)$$

findet man dann für die Transportgleichung der turbulenten Spannungen (2.11)

$$2k \frac{Db_{ij}}{Dt} - D_{ij} + \frac{\overline{u_i u_j}}{k} D_k = P_{ij} - \epsilon_{ij} + \Pi_{ij} - \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} - \frac{\overline{u_i u_j}}{k} (P_k - \epsilon) . \quad (2.16)$$

Turbulenzmodelle, die auf der Modellierung dieser Transportgleichung basieren, bezeichnet man als (differentielle) Reynolds-Spannungsmodelle. Probleme bereitet dabei vor allem die Modellierung der Druck-Scher-Korrelation Π_{ij} , die im folgenden behandelt wird.

2.5 Druck-Scher-Korrelation

Viele der heute noch verwendeten Modelle der Druck-Scher-Korrelation basieren auf einer Arbeit von LAUNDER, REECE und RODI [LRR74] und einer grundlegenden Idee von ROTTA [Rot51]. Man spaltet die DSK in einen schnellen $\Phi_{ij,1}$ und einen langsamen Teil

$\Phi_{ij,2}$ auf, die die Wechselwirkung des Druckes mit den Geschwindigkeitsschwankungen bzw. mit dem zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsfeld beschreiben.

$$\overline{\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} = \Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2} \quad (2.17)$$

Die beiden Terme wurden von LAUNDER ET AL [LRR74] in der folgenden Weise modelliert:

$$\Phi_{ij,1} = - C_1' \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij,2} = & - \frac{C_2' + 8}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) - \frac{30C_2' - 2}{55} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{8C_2' - 2}{11} \left(D_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

mit

$$P_{ij} = -\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \quad D_{ij} = -\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j}$$

Die Konstanten wurden in der Originalarbeit [LRR74] zu $C_1'=1.5$ bzw. $C_2'=0.4$ bestimmt. Etwas andere Konstanten werden von TAULBEE [Tau92] vorgeschlagen, die eine bessere Übereinstimmung mit den Messungen von CHAMPAGNE ET AL [CHC70] in homogenen Scherströmungen ergeben. Die Koeffizienten nehmen in diesem Fall die Werte $C_1'=1.8$ und $C_2'=0.52$ an.

Zahlreiche Anwendungen des LRR-Modells haben gezeigt, daß es vorteilhafter ist, den zweiten und dritten Term auf der rechten Seite der Gleichung (2.19) wegzulassen. Die Koeffizienten des resultierenden vereinfachten Modells

$$\Phi_{ij,1} = - C_1'' \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (2.20)$$

$$\Phi_{ij,2} = - C_2'' \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) \quad (2.21)$$

geben GIBSON und LAUNDER [GL77] mit $C_1''=1.6$ bzw. $C_2''=0.6$ an. Dieses vereinfachte Modell wird in der Literatur häufig als das Basismodell oder auch kurz als das IP-Modell (Isotropisation of Production) bezeichnet [Lau91, Lau92]; es ist das wohl am häufigsten verwendete DSK-Modell.

Führt man auch in diese DSK-Modelle den Anisotropietensor b_{ij} ein, so erhält man nach einfachen Umformungen eine allgemeine Gleichung für alle in b_{ij} linearen DSK-Modelle [GS92, Gir95, Gir96]

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = & - \left(C_1^0 \epsilon + C_1^1 P_k \right) b_{ij} + C_2 k S_{ij} \\ & + C_3 k \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) \\ & + C_4 k \left(b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik} \right) . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Für die Umrechnung der Koeffizienten gelten die folgenden Vorschriften:

LRR- und TB-Modell

$$\begin{aligned} C_1^0 &= 2C_1' \\ C_1^1 &= 0 \\ C_2 &= \frac{4}{3} \left(\frac{C_2' + 8}{11} + \frac{8C_2' - 2}{11} \right) - 2 \frac{30C_2' - 2}{55} = 0.8 \\ C_3 &= 2 \left(\frac{C_2' + 8}{11} + \frac{8C_2' - 2}{11} \right) \\ C_4 &= 2 \left(\frac{C_2' + 8}{11} - \frac{8C_2' - 2}{11} \right) \end{aligned}$$

GLIP-Modell

$$C_1^0 = 2C_1' \quad C_1^1 = 0 \quad C_2 = \frac{4}{3}C_2'' \quad C_3 = 2C_2'' \quad C_4 = 2C_2''$$

Tabelle 2.1: Koeffizienten der verwendeten linearen DSK-Modelle.

Modell	C_1^0	C_1^1	C_2	C_3	C_4
LRR	3.0	0	0.8	1.75	1.31
GLIP	3.6	0	0.8	1.2	1.2
TB	3.6	0	0.8	1.94	1.16
SSG	6.8	0	0.36	1.25	0.4

Abschließend sei noch die in [Gat96] angegebene linearisierte Version eines von SPEZIALE, SARKAR und GATSKI [SSG91] entwickelten DSK-Modells angegeben. Dieses Modell wurde sehr sorgfältig an homogene Strömungen angepaßt. Die resultierenden Koeffizienten aller in dieser Arbeit verwendeten DSK-Modelle sind in Tabelle 2.1 zusammengefaßt.

Es wird auf den ersten Blick deutlich, daß eine erhebliche Diskrepanz zwischen den Modellkonstanten besteht, vor allem das SSG-Modell weicht erheblich von den anderen Modellen ab.

Resultierende Transportgleichung

Setzt man die allgemeine Form der DSK (2.22) in die Transportgleichung (2.16) ein, so erhält man die resultierende Transportgleichung

$$2 \frac{k}{\epsilon} \frac{Db_{ij}}{Dt} - \frac{1}{\epsilon} \left(D_{ij} - \frac{\overline{u_i u_j}}{k} D_k \right) + b_{ij} \left((C_1^0 - 2) + (C_1^1 + 2) \frac{P_k}{\epsilon} \right) = \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(C_2 - \frac{4}{3} \right) \frac{k}{\epsilon} S_{ij} \\
& + (C_3 - 2) \frac{k}{\epsilon} \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) \\
& + (C_4 - 2) \frac{k}{\epsilon} (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) ,
\end{aligned}$$

wobei in dem Rotationstensor nun noch die Winkelgeschwindigkeit Ω_m auftritt

$$W_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} - U_{j,i}) + \frac{C_4 - 4}{C_4 - 2} e_{mji} \Omega_m . \quad (2.24)$$

In den letzten Jahren sind zahlreiche kompliziertere in b_{ij} nichtlineare DSK-Modelle [FLT87, SSG91] entwickelt worden, die zum Teil wesentlich bessere Ergebnisse liefern als die linearen Modelle, ohne jedoch einen wirklichen Durchbruch darzustellen. Diese Nichtlinearität führt aber zu weiteren Schwierigkeiten bei der Entwicklung in b_{ij} expliziter algebraischer Reynolds-Spannungsmodelle, so daß diese DSK-Modelle im folgenden nicht berücksichtigt werden.

Die Transportgleichung (2.23) stellt ein System gekoppelter nichtlinearer partieller Differentialgleichungen dar, deren numerische Lösung sehr aufwendig und vor allem bei 3-dimensionalen Anwendungen kaum ernsthaft in Betracht gezogen werden kann. Dieses ist die Motivation für die Entwicklung algebraischer Reynolds-Spannungsmodelle, bei denen die Notwendigkeit der Lösung weiterer partieller Differentialgleichungen entfällt.

2.6 Implizite algebraische Reynolds-Spannungsmodelle

Die Transportgleichung (2.23) vereinfacht sich zu einer algebraischen Gleichung, wenn $Db_{ij}/Dt = 0$ und die Differenz der beiden diffusiven Terme auf der linken Seite klein ist. Diese Bedingungen werden von homogenen turbulenten Strömungen grundsätzlich erfüllt. Gleiches gilt für inhomogene turbulente Strömungen, bei denen Produktion und Destruktion turbulenter Spannungen lokal im Gleichgewicht stehen. *Diese Gleichgewichtsannahme ist damit eine fundamentale Annahme, die jedem algebraischen Reynolds-Spannungsmodell zugrunde liegt.*

2.6.1 Der Ansatz von Gatski und Speziale

Folgt man den obigen Überlegungen [GS92], setzt

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = 0 \quad (2.25)$$

und vernachlässigt weiterhin die Differenz der beiden diffusiven Terme, so erhält man unmittelbar die folgende algebraische Gleichung für die Reynoldsschen Spannungen

$$\begin{aligned}
b_{ij} \left((C_1^0 - 2) + (C_1^1 + 2) \frac{P_k}{\epsilon} \right) & = \left(C_2 - \frac{4}{3} \right) \frac{k}{\epsilon} S_{ij} \\
& + (C_3 - 2) \frac{k}{\epsilon} \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) \\
& + (C_4 - 2) \frac{k}{\epsilon} (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) .
\end{aligned} \quad (2.26)$$

Der konvektive Term wird auf diese Weise vollständig vernachlässigt und der diffusive Transport der turbulenten Spannungen wird durch

$$D_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} D_k \quad (2.27)$$

approximiert, wobei der Strukturparameter $\overline{u_i u_j}/k$ als im gesamten Strömungsfeld konstant angenommen wird. Im Bereich des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes findet man in der Tat für $\overline{u_1 u_2}/k$ den in guter Näherung konstanten Wert 0.3. Diese Annahme ist i.a. jedoch nicht gerechtfertigt, so daß der diffusive Transport letztlich auf sehr grobe Weise modelliert wird.

Dieses Modell entspricht exakt dem algebraischen Modell von RODI [Rod76]. Es ist implizit in b_{ij} und der Produktionsterm der Reynoldsschen Spannungen bleibt vollständig erhalten.

Der Quotient P_k/ϵ und auch $\frac{k}{\epsilon} S_{ij}$ nehmen dabei einen modellspezifischen konstanten Wert an. Damit strebt z.B. auch die dimensionslose Invariante des Deformationstensors $\eta = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$ gegen einen asymptotischen Grenzwert η_∞ . Wie später noch gezeigt wird, ergeben sich im Falle einer homogenen Scherströmung je nach Modellvariante Werte zwischen $\eta_\infty \approx 4.3$ und $\eta_\infty \approx 6.5$. Der dazugehörige Quotient P_k/ϵ liegt dann zwischen 1.8 und 2.1. Vergleicht man diese Werte mit den charakteristischen Werten des logarithmischen Bereichs einer Wandgrenzschichtströmung, $\eta = 3.3$ und $P_k/\epsilon \approx 1$, so wird deutlich, daß die asymptotischen Grenzwerte relativ hochliegen.

Die algebraische Gleichung stellt nur asymptotisch für η_∞ eine gute Näherung an die Transportgleichung dar. Wie später noch gezeigt wird, weicht die algebraische Gleichung für kleine η stark von der Transportgleichung ab.

2.6.2 Der Ansatz von Taubee

Aufgrund dieser Überlegungen wurde von TAULBEE [Tau92] ein alternativer Ansatz vorgeschlagen. Für kleine η gilt näherungsweise $b_{ij} \approx \eta$, so daß

$$\frac{D b_{ij}}{Dt} = 0 \quad (2.28)$$

zu einer besseren asymptotischen Lösung für kleine η führt und gleichzeitig wegen

$$\frac{D b_{ij}}{Dt} = \frac{1}{\eta} \frac{D b_{ij}}{Dt} - \frac{b_{ij}}{\eta^2} \frac{D \eta}{Dt} = 0 \quad (2.29)$$

auch näherungsweise die schon bekannte asymptotische Lösung für große η liefert ($D\eta/Dt$ strebt für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch gegen Null). In homogenen Strömungen vereinfachen sich die Transportgleichungen der Turbulenzenergie (2.7) und der Dissipation (2.8) zu

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \epsilon \quad (2.30)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = C_{\epsilon,1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon,2} \frac{\epsilon^2}{k}, \quad (2.31)$$

und damit findet man

$$\frac{D\frac{k}{\epsilon}}{Dt} = -(C_{\epsilon,1} - 1) \frac{P_k}{\epsilon} + (C_{\epsilon,2} - 1) . \quad (2.32)$$

Mit den Abkürzungen $\sigma = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ und $\tau = k/\epsilon$ folgt weiterhin

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} \frac{D\eta}{Dt} &= \frac{1}{\sigma} \frac{D\sigma}{Dt} + \frac{1}{\tau} \frac{D\tau}{Dt} \\ &= \frac{1}{\sigma} \frac{D\sigma}{Dt} + \frac{1}{\tau} \left[(C_{\epsilon,2} - 1) - (C_{\epsilon,1} - 1) \frac{P_k}{\epsilon} \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

und man erhält nach Einsetzen in (Gl.2.23) die folgende algebraische Transportgleichung

$$\begin{aligned} b_{ij} \frac{k}{\sigma} \frac{D\sigma}{Dt} + b_{ij} \left((C_1^0 - 4 + 2C_{\epsilon,2}) + (C_1^1 + 4 - 2C_{\epsilon,1}) \frac{P_k}{\epsilon} \right) \\ = \left(C_2 - \frac{4}{3} \right) \frac{k}{\epsilon} S_{ij} \\ + (C_3 - 2) \frac{k}{\epsilon} \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) \\ + (C_4 - 2) \frac{k}{\epsilon} (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Auch hier wird der konvektive Term vollständig vernachlässigt und der diffusive Transport in gleicher Weise modelliert wie nach dem Ansatz von GATSKI und SPEZIALE (Gl.2.27). In dieser Transportgleichung treten zusätzlich die Koeffizienten aus der modellierten Dissipationsgleichung auf. Interessant ist, daß außerdem konvektive Einflüsse durch den ersten Term auf der linken Seite berücksichtigt werden. In homogenen Strömungen ist dieser konvektive Term gleich Null. Inwieweit dieser Ansatz eine bessere Näherung an die vollständige Transportgleichung darstellt, wird im nächsten Kapitel gezeigt.

2.6.3 Bemerkungen zur impliziten Struktur der Modelle

Die hier abgeleiteten algebraischen Gleichungen sind implizit in b_{ij} , d.h. sie können i.a. nicht nach b_{ij} aufgelöst werden. Ihre Anwendung erfordert die iterative Lösung eines nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems.

Dieses an sich würde immer noch einen Rechenzeitgewinn gegenüber der Lösung der vollständigen Transportgleichung bringen. Die algebraischen Modelle enthalten nachwievor den vollständigen Produktionsterm P_{ij} der turbulenten Spannungen, der für die starke Kopplung der turbulenten Spannungen verantwortlich ist. Erfahrungen mit dem algebraischen Reynolds-Spannungsmodell von RODI [Rod76] haben jedoch gezeigt, daß diese Kopplung und die gleichzeitig sehr grobe Modellierung des diffusiven Transportes der turbulenten Spannungen das Modell außerordentlich instabil machen. Die Anwendung impliziter algebraischer Reynolds-Spannungsmodelle erfordert sehr feine numerische Netze und/oder sehr kleine Zeitschritte, so daß der Rechenzeitgewinn erheblich zusammenschrumpft. In vielen Fällen ist es schwierig, überhaupt eine konvergierte Lösung zu erzielen.

Diese inhärente Instabilität mag bei wissenschaftlichen Arbeiten noch hinnehmbar sein, in der industriellen Anwendung ist sie jedoch nicht akzeptabel, so daß heutzutage von der Anwendung dieser impliziten Modelle abgeraten wird [Les95, Lau95].

Dieser Sachverhalt führte zur Entwicklung in b_{ij} expliziter algebraischer Reynolds-Spannungsmodelle, die im folgenden behandelt wird.

2.7 Explizite algebraische Reynolds-Spannungsmodelle

2.7.1 Reihenansatz für die turbulenten Spannungen

Die obigen Betrachtungen haben gezeigt, daß die turbulenten Spannungen offenbar eine Funktion des Deformations- und Rotationstensors, sowie der Turbulenzenergie und ihrer Dissipation sind.

$$b_{ij} = f \left(S_{ij}, W_{ij}, \frac{k}{\epsilon} \right) \quad (2.35)$$

Die turbulenten Spannungen kann man approximieren durch ein Polynom linear unabhängiger Tensoren T^λ zweiter Ordnung, die sich mit dem Deformations- und Rotationstensor bilden lassen

$$b_{ij} = \sum_{\lambda} G_{\lambda} T^{\lambda} . \quad (2.36)$$

Die Koeffizienten G_{λ} sind ihrerseits Funktionen aller dimensionslosen Invarianten η_i des Deformations- und Rotationstensors.

POPE [Pop75] und später SPEZIALE und GATSKI [GS92] zeigen, daß in 2-dimensionalen Strömungen lediglich drei linear unabhängige Tensoren

$$\begin{aligned} T^1 &= \frac{k}{\epsilon} S_{ij} \\ T^2 &= \frac{k^2}{\epsilon^2} (S_{kj} W_{ik} + S_{ki} W_{jk}) \\ T^3 &= \frac{k^2}{\epsilon^2} \left(S_{ik} S_{jk} - \frac{1}{3} S_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

und zwei skalare linear unabhängige Invarianten existieren, die bereits in Gleichung (2.10) eingeführt wurden.

$$\eta = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad \xi = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{2W_{ij}W_{ij}}$$

Der nur für 2-dimensionale Strömungen gültige resultierende Reihenansatz lautet damit

$$\begin{aligned} b_{ij} &= G_1 \frac{k}{\epsilon} S_{ij} \\ &+ G_2 \frac{k^2}{\epsilon^2} (S_{kj} W_{ik} + W_{jk} S_{ki}) \\ &+ G_3 \frac{k^2}{\epsilon^2} \left(S_{ik} S_{jk} - \frac{1}{3} S_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) , \end{aligned} \quad (2.38)$$

wobei die Koeffizienten G_λ Funktionen der skalaren Invarianten η und ξ sind.

Die in diesem Ansatz auftretenden Koeffizienten G_λ bestimmt man nun durch Einsetzen des Reihenansatzes in die algebraischen Gleichungen (2.26) bzw. (2.34). Das resultierende Gleichungssystem ist nichtlinear in b_{ij} , weil auf der linken Seite der Quotient P_k/ϵ steht, der seinerseits eine Funktion der b_{ij} ist. Weiterhin tritt infolge dieser Nichtlinearität der Koeffizient G_1 zur dritten Potenz auf, so daß es mehrere Lösungen gibt, von denen aber nur eine physikalisch korrekt sein kann [Gir95, Gir96].

Eine einfache Methode, dieses Problem zu umgehen, besteht darin, den Quotienten P_k/ϵ implizit zu behandeln, ihn also als bekannt vorauszusetzen. Dieser Weg wurde zuerst von POPE [Pop75] eingeschlagen und führt zu einem semi-expliziten Modell. Die Anwendung erfordert dann eine iterative Lösung über P_k/ϵ . GATSKI und SPEZIALE [GS92] greifen diese Idee auf und schlagen eine mögliche Linearisierung dieser Gleichung vor, in dem sie für P_k/ϵ den asymptotischen Grenzwert einsetzen.

Erst kürzlich wurde von GIRIMAJI [Gir95, Gir96] eine vollständig explizite Lösung vorgeschlagen, die, wie leicht zu zeigen ist, identisch mit der semi-expliziten Lösung von POPE [Pop75] ist, jedoch keine Iteration mehr erfordert. Die auf diese Weise abgeleiteten Modelle werden im folgenden beschrieben.

2.7.2 Semi-explizite Lösung von Pope

Eine semi-explizite Lösung wurde von zuerst von POPE [Pop75] und später erneut von GATSKI und SPEZIALE [GS92] vorgeschlagen. Diese Modelle sind explizit in b_{ij} , aber implizit in P_k/ϵ .

$$\alpha_1 = \left(\frac{4}{3} - C_2\right) \frac{g}{2} \quad \alpha_2 = (2 - C_4) \frac{g}{2} \quad \alpha_3 = (2 - C_3) \frac{g}{2} \quad (2.39)$$

$$C_\mu = \frac{3}{3 - \alpha_3^2 \eta^2 + 3\alpha_2^2 \xi^2} \alpha_1 \quad (2.40)$$

Die Wahl des zur Algebraisierung der Transportgleichung verwendeten Ansatzes führt zu unterschiedlichen Ausdrücken für den Faktor g .

Ansatz von Gatski und Speziale

$$g = \frac{1}{\frac{C_\mu^0}{2} + \frac{P_k}{\epsilon} - 1} \quad (2.41)$$

Ansatz von Taulbee

$$g = \frac{1}{\frac{C_\mu^0}{2} + C_{\epsilon,2} - 2 + (2 - C_{\epsilon,1}) \frac{P_k}{\epsilon} + \frac{\tau D\sigma}{\sigma}} \quad (2.42)$$

Die Koeffizienten G^λ des Reihenansatzes ergeben sich dann wie folgt:

Modell	G_1	G_2	G_3
POP	$-C_\mu$	$4C_\mu\alpha_3$	$4C_\mu\alpha_2$

Anwendungen dieses Modells sind dem Autor nicht bekannt.

2.7.3 Linearisiertes und regularisiertes Modell von Gatski und Speziale

GATSKI und SPEZIALE [GS92] weisen darauf hin, daß der Nenner in Gleichung (2.40) bei sehr großer Deformation zu Null werden kann. Um dieses Problem zu vermeiden, schlagen die Autoren eine Padé-Approximation vor, wonach man für kleine $\alpha_3^2\eta^2$ mit

$$\alpha_3^2\eta^2 \approx 1 - \frac{1}{1 + \alpha_3^2\eta^2} \quad (2.43)$$

den folgenden regularisierten Ausdruck findet

$$C_\mu = \frac{3(1 + \alpha_3^2\eta^2)}{3 + 2\alpha_3^2\eta^2 + 3\alpha_3^2\alpha_3^2\eta^2\xi^2 + 3\alpha_3^2\xi^2} \alpha_1, \quad (2.44)$$

wobei die Koeffizienten α_1 bis α_3 sich wieder aus

$$\alpha_1 = \left(\frac{4}{3} - C_2\right) \frac{g}{2} \quad \alpha_2 = (2 - C_4) \frac{g}{2} \quad \alpha_3 = (2 - C_3) \frac{g}{2} \quad (2.45)$$

ergeben und der Faktor g folgt aus

$$g = \frac{1}{\frac{C_\mu^0}{2} + \frac{P_k}{\epsilon} - 1}. \quad (2.46)$$

Eine Übertragung dieses Vorgehens auf den Ansatz nach TAULBEE ist ohne Probleme möglich. Diese Möglichkeit wird aber hier nicht weiter verfolgt, weil dieses Modell, wie sich später noch deutlich zeigen wird, einige ungünstige Eigenschaften aufweist und daher nicht wirklich empfohlen werden kann.

Um die Iteration über P_k/ϵ zu vermeiden, setzen die Autoren an dieser Stelle den asymptotischen Wert ein, der sich nach Gleichung (2.32) aus

$$\frac{P_k}{\epsilon} = \frac{C_{\epsilon,2} - 1}{C_{\epsilon,1} - 1} \quad (2.47)$$

ergibt. Das Modell wird auf diese Weise vollständig explizit.

Modell	G_1	G_2	G_3
GS	$-C_\mu$	$4C_\mu\alpha_3$	$4C_\mu\alpha_2$

Anwendungen dieses Modells als High-Reynolds-Number Modell sind dem Autor nicht bekannt. Es wurde dagegen als Low-Reynolds-Number Modell sowohl von GATSKI [Gat96] als auch ABID ET AL [ARG95] zur Berechnung von Tragflügelströmungen verwendet, wobei die Ansätze für die Koeffizienten als Dämpfungsfunktion dienen.

2.7.4 Explizite Lösung von Girimaji

Eine vollständig explizite Lösung wurde von GIRIMAJI [Gir95, Gir96] vorgestellt. Die Schwierigkeit bestand, wie oben schon angesprochen, in der Auswahl der physikalisch sinnvollen Lösung. Es ist leicht zu zeigen, daß dieses explizite Modell in der Tat identisch mit der semi-expliziten Lösung von POPE ist.

In der Originalarbeit [Gir95] gibt GIRIMAJI lediglich die explizite Lösung für den Ansatz von GATSKI und SPEZIALE (Gl.2.26) an, sie läßt sich aber auf den TAULBEE-Ansatz (Gl.2.34) übertragen, sofern man den Transportterm $D\sigma/Dt$ auf der linken Seite vernachlässigt. Eine Berücksichtigung dieses Termes wäre bei der in dieser Arbeit verwendeten Methode der Finiten Elemente ohnehin schwierig. Die Geschwindigkeitsverteilung wird innerhalb eines Elementes durch lineare Ansätze approximiert, so daß die Auswertung der im Transportterm auftretenden zweiten Ableitung der Geschwindigkeit problematisch ist und inkonsistent zu der linearen Approximation wäre.

Algebraisches Modell von Gatski und Speziale

$$L_1^0 = \frac{C_1^0}{2} - 1 \quad L_1^1 = C_1^1 + 1 \quad L_2 = \frac{C_2}{2} - \frac{2}{3} \quad L_3 = \frac{C_3}{2} - 1 \quad L_4 = \frac{C_4}{2} - 1 \quad (2.48)$$

Algebraisches Modell von Taulbee

$$L_1^0 = \frac{C_1^0}{2} - 2 + C_{\epsilon,2} \quad L_1^1 = C_1^1 + 4 - 2C_{\epsilon,1} \quad L_2 = \frac{C_2}{2} - \frac{2}{3} \quad L_3 = \frac{C_3}{2} - 1 \quad L_4 = \frac{C_4}{2} - 1 \quad (2.49)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} p &= -\frac{2L_1^0}{\frac{1}{2}\eta^2 L_1^1} & r &= -\frac{L_1^0 L_2}{\left(\frac{1}{2}\eta^2 L_1^1\right)^2} & \cos(\Theta) &= \frac{-b/2}{\sqrt{-a^3/27}} \\ q &= \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\eta^2 L_1^1\right)^2} \left[\left(L_1^0\right)^2 + \frac{1}{2}\eta^2 L_1^1 L_2 - \frac{1}{3}\eta^2 \left(L_3\right)^2 + \xi^2 \left(L_4\right)^2 \right] \\ a &= q - \frac{p^2}{3} & b &= \frac{1}{27} \left(2p^3 - 9pq + 27r \right) & D &= \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} \end{aligned} \quad (2.50)$$

findet man für den Koeffizienten G_1

$$G_1 = \begin{cases} L_1^0 L_2 / \left[\left(L_1^0\right)^2 + \xi^2 \left(L_4\right)^2 \right] & \text{falls } \eta = 0 \\ L_1^0 L_2 / \left[\left(L_1^0\right)^2 - \frac{1}{3}\eta^2 \left(L_3\right)^2 + \xi^2 \left(L_4\right)^2 \right] & \text{falls } L_1^1 = 0 \\ -\frac{p}{3} + \left(-\frac{b}{2} + \sqrt{D}\right)^{1/3} + \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{D}\right)^{1/3} & \text{falls } D > 0 \\ -\frac{p}{3} + 2\sqrt{\frac{-a}{3}} \cos\left(\frac{\Theta}{3}\right) & \text{falls } D < 0, \quad b < 0 \\ -\frac{p}{3} + 2\sqrt{\frac{-a}{3}} \cos\left(\frac{\Theta}{3} + \frac{2}{3}\pi\right) & \text{falls } D < 0, \quad b > 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

und für die beiden übrigen Koeffizienten

$$G_2 = \frac{-L_4}{L_1^0 - \frac{1}{2}\eta^2 L_1^1} G_1 \quad G_3 = \frac{2L_3}{L_1^0 - \frac{1}{2}\eta^2 L_1^1} G_1. \quad (2.52)$$

Die hier angegebenen Koeffizienten G_λ können unmittelbar in den allgemeinen Ansatz eingesetzt werden. Der Koeffizient G_1 entspricht wie bei den vorherigen Modellen dem Koeffizienten C_μ , multipliziert mit -1 .

Anwendungen dieser expliziten Lösung auf komplexe turbulente Strömungen sind dem Autor bislang nicht bekannt.

2.8 Konstitutive Gleichungen

Einen etwas anderen Weg zur der Entwicklung algebraischer Reynolds-Spannungsmodelle schlagen SHIH ET AL [SZL93] vor. Unter der Annahme, daß die Reynoldsschen Spannungen eine Funktion der lokalen Geschwindigkeitsgradienten, der lokalen Turbulenzenergie und Dissipation sind,

$$\overline{u_i u_j} = F_{ij}(U_{i,j}, k, \epsilon) \quad (2.53)$$

entwickeln SHIH ET AL [SZL93, SL92] aus kontinuumsmechanischen Betrachtungen konstitutive Gleichungen, in denen die Reynoldsschen Spannungen eine nichtlineare Funktion der lokalen Geschwindigkeitsgradienten sind.

$$\begin{aligned} b_{ij} = & - C_\mu \frac{k}{\epsilon} S_{ij} \\ & + C_1 \frac{k^2}{\epsilon^2} \left(S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) \\ & + C_2 \frac{k^2}{\epsilon^2} (S_{kj} W_{ik} + W_{jk} S_{ki}) \\ & + C_3 \frac{k^2}{\epsilon^2} \left(W_{ik} W_{jk} - \frac{1}{3} W_{mn} W_{mn} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Eine solche konstitutive Gleichung kann nur dann existieren, wenn die turbulenten Spannungen ausschließlich vom lokalen Strömungsfeld abhängen. Der konvektive und diffusive Transport muß also vernachlässigbar sein. Damit basiert diese konstitutive Gleichung auf den gleichen grundlegenden Annahmen wie der Reihensatz (2.38).

In der Tat ist diese konstitutive Gleichung bis auf den dritten Term identisch mit dem Reihenansatz (2.38). Dieser C_3 -Term führt zu einem unphysikalischen Verhalten bei reiner Rotation. In Abwesenheit jeglicher Deformation, $S_{ij} = 0$, erzeugt Rotation keine turbulenten Spannungen (rapid distortion theory). Diese Bedingung wird aber in einem mit Ω_m rotierenden System wegen $W_{ij} = f(\Omega_m) \neq 0$ nur erfüllt, wenn $C_3 = 0$ ist.

Die vollständige konstitutive Gleichung enthält allerdings noch Terme dritter und höherer Ordnung, die in der obigen Gleichung vernachlässigt wurden. Gleiches gilt im allgemeinen 3-dimensionalen Fall auch für den zu (Gl.2.38) analogen Reihensatz [Tau92, GS92].

Einige Autoren [CLS93, CLS95] berücksichtigen zusätzlich die kubischen Terme, auch bei 2-dimensionalen Strömungen. Aufgrund der in der dritten Potenz auftretenden Geschwindigkeitsgradienten reagieren diese Modelle empfindlicher auf kleine Deformationen. Nach [CLS93, CLS95] führt dieses zu einer weiter verbesserten Modellierung der turbulenten Spannungen und insbesondere der Sensitivität gegenüber einer Krümmung der Stromlinien (siehe dazu Kapitel 3.4). Die in diesen Arbeiten vorgeschlagenen kubischen Modelle enthalten außerdem den C_3 -Term, was im Konflikt zu den obigen Überlegungen steht. Da diese Modelle außerdem nur in Verbindung mit Low-Reynolds-Number Formulierungen entwickelt wurden, werden diese kubischen Modelle im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter behandelt.

Interessant ist ferner, daß RUBINSTEIN und BARTON [RB90] basierend auf der RNG-Methode ein strukturell identisches Modell entwickelt haben. Der Umstand, daß mit zwei verschiedenen Methoden der identische Satz algebraischer Gleichungen hergeleitet wurde, spricht sehr für die Gültigkeit dieser konstitutiven Gleichungen.

Auf Basis dieser konstitutiven Gleichungen sind verschiedene Modellvarianten vorgeschlagen worden. Während die Koeffizienten der im vorherigen Kapitel beschriebenen Modelle durch Einsetzen in die algebraischen Transportgleichungen bestimmt wurden, werden jetzt die Koeffizienten entweder empirisch oder analytisch nach der Renormalisierungs Gruppen Methode ermittelt. Einige dieser Modellvarianten werden im folgenden beschrieben.

2.8.1 Modelle mit konstanten Koeffizienten

Es sind einige Modellvarianten mit konstanten Koeffizienten vorgeschlagen worden, die bereits mit einem gewissem Erfolg eingesetzt worden sind. Zwei dieser Modellvarianten seien an dieser Stelle erwähnt. Es ist zunächst das von RUBINSTEIN und BARTON [RB90] analytisch nach der RNG-Methode abgeleitete RB-Modell und zum anderen ein ebenfalls in [RB90] angegebenes von SPEZIALE entwickeltes Modell.

Modell	C_1	C_2	C_3
RB	0.114	0.024	-0.094
SP	0.0275	0.0275	0.0

Es wird sofort deutlich, daß eine erhebliche Diskrepanz zwischen den Modellkonstanten besteht. CRAFT ET AL [CLS95] werten dies als Indiz dafür, daß quadratische Modelle nicht zu allgemeingültigeren Modellen führen. Folgt man den Ausführungen in den vorherigen Kapiteln, so erscheint diese Schlussfolgerungen etwas voreilig. Die in der Tat sehr unterschiedlichen Koeffizienten sind wohl eher ein Indiz dafür, daß diese Modelle noch nie systematisch untersucht worden sind. Es handelt sich meist um Einzelarbeiten, eine Optimierung der Koeffizienten hat bislang noch nicht stattgefunden.

Kritischer erscheint hingegen der Umstand, daß diese Koeffizienten konstante Werte annehmen. Anhand einiger Überlegungen zur Realizability der Turbulenzmodelle zeigen SHIH ET AL [SZL93], daß dieses i.a. nicht zulässig ist.

2.8.2 Realizability

Die strenge Form der Realizability [Sch77] verlangt, daß alle turbulenten Normalspannungen und nicht nur deren Summe positiv sind. Das lineare k - ϵ -Modell kann man schreiben als

$$\overline{u_i u_j} = -2C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} S_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} . \quad (2.55)$$

In einer ebenen inkompressiblen Kanalströmung findet man für die turbulenten Normalspannungen

$$\overline{u_i^2} = -2C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} S_{ii} + \frac{2}{3} k \stackrel{!}{>} 0 \quad (2.56)$$

und Umschreiben dieser Gleichung liefert dann die Bedingung

$$\frac{k}{\epsilon} S_{ii} \stackrel{!}{<} \frac{1}{3C_\mu} C_\mu \stackrel{=0.09}{=} 3.7 . \quad (2.57)$$

Ferner müssen die turbulenten Spannungen der Schwarzschen Ungleichung

$$\frac{\overline{u_i u_j}}{\overline{u_i^2} \overline{u_j^2}} \stackrel{!}{\leq} 1 \quad (2.58)$$

genügen, woraus man die zusätzliche Bedingung

$$C_\mu \frac{k}{\epsilon} S_{ij} \stackrel{!}{\leq} \frac{2}{3} \quad (2.59)$$

ableiten kann. Daraus folgt, daß das lineare k - ϵ -Modell für große S_{ij} im strengen Sinne nicht vollständig realizable ist. Dieses ist offensichtlich nur möglich, wenn der Koeffizient C_μ keine Konstante mehr ist, sondern eine Funktion der Form

$$C_\mu = f\left(1/\frac{k}{\epsilon} S_{ij}\right) \quad \text{bzw.} \quad C_\mu = f(1/\eta) \quad (2.60)$$

sein muß.

Angemerkt sei, daß in einer einfachen ebenen Kanalströmung im Bereich des universellen Geschwindigkeitsgesetzes η bei ungefähr 3.3 liegt, der Wert 3.7 also keineswegs außergewöhnlich groß ist.

Unter schwacher Realizability versteht man die Forderung, daß die Summe aller Normalspannungen, also die Turbulenzenergie positiv sein muß. Diese Bedingung wird vom Standard k - ϵ -Modell erfüllt.

2.8.3 Das Modell von Shih, Zhu und Lumley

Um die Realizability Bedingungen zu erfüllen, schlagen SHIH ET AL [SZL93] folgende einfache Ansätze für die Koeffizienten vor.

$$C_\mu = \frac{2/3}{1.25 + \eta + 0.9\xi} \quad (2.61)$$

Modell	C_1	C_2	C_3
SZL	$\frac{3/2}{1000+\eta^3}$	$\frac{15/2}{1000+\eta^3}$	$\frac{19/2}{1000+\eta^3}$

Im Falle eines rotierenden Systems wird die Winkelgeschwindigkeit in der folgenden Form im Rotationstensor berücksichtigt:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} - U_{j,i}) + 4\epsilon_{mji}\Omega_m . \quad (2.62)$$

In diesem Modell sind die Koeffizienten keine Konstanten. Verglichen mit den anderen Modellen ist der funktionale Zusammenhang jedoch ausgesprochen einfach. Insbesondere der Faktor 1000 im Nenner der C_i -Koeffizienten erscheint etwas beliebig ($\eta^3 \ll 1000$).

Dieses Modell ist bereits mit Erfolg auf einige komplexe Strömungsprobleme angewendet worden. So erwies sich dieses Modell bei der Berechnung eingeschlossener axialsymmetrischer paralleler Strahlströmungen (confined coflow jets) als dem Standard k - ϵ -Modell überlegen [ZS93, SZ94]. Sowohl die Lage des Ablösepunktes als auch die Erstreckung der Rezirkulationszone in der äußeren Ringströmung steht in signifikant besserer Übereinstimmung mit experimentellen Daten. Ähnliches gilt für die Strömung in axialsymmetrischen Diffusoren bei 8° und 10° Öffnungswinkel und die Strömung über eine zurückspringende Stufe [SZ94].

2.8.4 Lineares Modell von Shih et al

In einer späteren Arbeit geben SHIH ET AL [S⁺94] eine etwas modifizierte C_μ -Funktion an. Dieses C_μ wird von SHIH ET AL zusammen mit einer alternativen Modellierung der Dissipationsgleichung verwendet, die im folgenden noch besprochen wird. Die modifizierte C_μ -Funktion kann jedoch auch mit der Standard ϵ -Gleichung angewendet werden.

$$C_\mu = \frac{1}{4 + A_s \frac{k}{\epsilon} U^*} = \frac{1}{4 + A_s \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\eta^2 + \xi^2}} \quad (2.63)$$

$$\text{mit} \quad U^* = \sqrt{S_{ij}S_{ij} + W_{ij}W_{ij}} \quad (2.64)$$

$$A_s = \sqrt{6} \cos \Phi \quad \Phi = \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6}W) \quad W = \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{S^3} \quad S = \sqrt{S_{ij}S_{ij}} \quad (2.65)$$

Dieser funktionale Zusammenhang erscheint relativ kompliziert, tatsächlich variiert A_s aber nur sehr wenig, so daß im Rahmen dieser Arbeit die Näherung

$$A_s = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (2.66)$$

verwendet wird. In rotierenden Kanälen wird die Winkelgeschwindigkeit Ω_m des rotierenden Systems im Rotationstensor W_{ij} berücksichtigt.

$$W_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} - U_{j,i}) + 3\epsilon_{mji}\Omega_m . \quad (2.67)$$

Dieser Ansatz unterscheidet sich von dem des SZL-Modells nur dadurch, daß der Faktor 4 im SZL-Modell durch einen Faktor 3 ersetzt worden ist. Wie sich später zeigen wird, führt diese Modifikation zu einer genaueren Modellierung des Einflusses der Rotation auf die Turbulenz.

2.9 Modellierung der Dissipationsgleichung

Die modelltechnische Bedeutung der Dissipationsgleichung liegt in der Bestimmung des lokalen Längenmaßes. Für die bereits in Gleichung (2.5) eingeführte Wirbelviskosität kann man nach KOLMOGOROV-PRANDTL aus Dimensionsgründen auch schreiben

$$\mu_\tau = \rho C_\mu \sqrt{k} L, \quad (2.68)$$

wobei die Turbulenzenergie k aus der entsprechenden Transportgleichung gewonnen wird und L das noch fehlende Längenmaß ist. Nach JONES und LAUNDER [JL72] folgt aus

$$L = \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \quad (2.69)$$

der schon in Gleichung (2.6) eingeführte Zusammenhang

$$\mu_\tau = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}.$$

Hier wird deutlich, daß dieser Ansatz lediglich auf Dimensionsbetrachtungen basiert. Grundsätzlich sind auch andere zur Dissipation alternative Ansätze der allgemeinen Form $k^a L^b$ denkbar. So sind z.B. Modelle vorgeschlagen worden, in denen das Längenmaß aus Bilanzgleichungen für $k^{1/2}/L$, k/L^2 oder auch kL berechnet wird. Heutzutage wird aber fast ausschließlich die Bilanzgleichung der Dissipation verwendet. Zurückzuführen ist dies zum einen auf die anschauliche physikalische Bedeutung der Dissipation, die z.B. unmittelbar in der Transportgleichung der Turbulenzenergie auftritt. Zum anderen treten in den alternativen Transportgleichungen weitere unbekannte Terme auf, die zu zusätzlichen Schwierigkeiten bei der Modellierung führen.

Es wurde bereits in Abschnitt 2.2 gezeigt, daß die Standardmodellierung der Dissipationsgleichung auf einer reinen Analogiebetrachtung zur k -Gleichung beruht. Hinter dieser Modellierung verbirgt sich die fundamentale Annahme eines lokalen Gleichgewichts in der Turbulenzenergiebilanz. Nur in diesem Fall ist es physikalisch plausibel, den Produktions-term der Turbulenzenergie auch in der Dissipationsgleichung zu verwenden.

Die Arbeiten von HANJALIC ET AL [HL80] und RODI ET AL [RS86] zeigen, daß in Strömungen, die gegen einen positiven Druckgradienten anlaufen, das Standard k - ϵ -Modell versagt. Es liefert in diesen Fällen vor allem in Wandnähe eine viel zu kleine Dissipation [RS86] und damit eine zu große turbulente Schubspannung. Aufgrund dieses unrealistisch großen Impulstroms in Richtung Wand werden z.B. freie Ablösungen entweder zu spät berechnet oder sogar vollständig unterdrückt. Dieses ist im übrigen eine der größten Schwächen des Standard k - ϵ -Modells.

Diese Problematik spielt vor allem in der Aerodynamik bei der Berechnung ablösender Strömungen an Tragflügeln eine wichtige Rolle. Etwas bessere Ergebnisse liefert in diesen

Fällen das von WILCOX [Wil88, Wil93] vorgeschlagene k - ω -Modell, das anstelle der ϵ -Gleichung eine analoge Bilanzgleichung für den Quotienten

$$\omega = \frac{\epsilon}{k} \quad (2.70)$$

verwendet. Dieses k - ω -Modell hat nur in der Aerodynamik breite Anwendung gefunden und alle Weiterentwicklungen dieses Modells wurden speziell im Hinblick auf Tragflügelumströmungen durchgeführt. So wurde die starke Abhängigkeit des wandnahen ω von den Werten in der Außenströmung von MENTER [Men92, Men94] durch eine Kombination des k - ω -Modells von WILCOX mit dem k - ϵ -Modell von JONES und LAUNDER [JL72] behoben. Auf einige Ergebnisse dieser Modellkombination wird später (Kapitel 3.5.1) noch genauer eingegangen.

Das k - ϵ - und das k - ω -Modell unterscheiden sich abgesehen von der das Längenmaß bestimmenden Gleichung nicht wesentlich. Die turbulenten Spannungen werden aus identischen expliziten algebraischen Spannungs-Deformations-Beziehungen bestimmt, wie sie in den vorherigen Kapiteln hergeleitet worden sind. Auch die Koeffizienten des k - ω -Modells dürfen i. a. keine Konstanten sein und die bereits vorgestellten Ansätze für die Koeffizienten der Spannungs-Deformations-Beziehung können grundsätzlich auch für das k - ω -Modell verwendet werden. Erste Ergebnisse mit einer solchen Modellkombination werden von ABID ET AL [ARG95] mitgeteilt, die das Standard k - ω -Modell von WILCOX [Wil88] mit der algebraischen Spannungs-Deformations-Beziehung nach GASTKI und SPEZIALE (Kap.2.7.3) kombiniert haben und auf die Strömung um NACA 4412 Tragflügelprofil angewendet haben. Auch auf diese Ergebnisse wird in Kapitel 3.5.1 noch eingegangen.

Ein Vorteil des k - ω -Modells gegenüber dem Standard k - ϵ -Modell liegt darin, daß es direkt bis zur Wand integriert werden kann, ohne daß der Einfluß der Wand durch Dämpfungsfunktionen eingearbeitet werden muß. Solche Low-Reynolds-Number Modelle werden in dieser Arbeit nicht behandelt.

Da das k - ω -Modell ansonsten keine Vorteile gegenüber dem k - ϵ -Modell bietet, erschien eine Implementierung des k - ω -Modells nicht sinnvoll. Die spezielle Problematik bei der Tragflügelumströmung wird in Kapitel 3.5.1 noch genauer diskutiert. Stattdessen werden im folgenden zwei alternative Modellierungen der Dissipationsgleichung eingeführt.

2.9.1 Das RNG-Modell

Eine sehr einfache Modifikation wurde von YAKHOT ET AL [Y⁺92] basierend auf der RNG-Methode entwickelt. Sie entdeckten einen zusätzlichen Produktionsterm in der Dissipationsgleichung, der durch eine vom lokalen Strömungsfeld abhängige Korrektur des Koeffizienten $C_{\epsilon,1}$ berücksichtigt wird.

$$C_{\mu} = 0.085 \quad C_{\epsilon,2} = 1.68 \quad \sigma_k = \sigma_{\epsilon} = 0.72 \quad (2.71)$$

$$C_{\epsilon,1} = 1.42 - \frac{\eta(1 - \eta/\eta_{\infty})}{1 + \beta\eta^3} \quad \beta = 0.012 \quad \eta_{\infty} = 4.38 \quad (2.72)$$

Die Abhängigkeit des Koeffizienten $C_{\epsilon,1}$ von η ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Der Koeffizient wird mit zunehmendem η zunächst kleiner, erreicht bei $\eta \approx 1.9$ sein Minimum und

steigt dann mit weiter wachsendem η bis auf $C_{\epsilon,1} \approx 2.4$ an. Sowohl für kleine η , stärker aber noch für große η führt dieses Verhalten aufgrund der dann relativ großen Dissipation zu einer Reduzierung des turbulenten Impulstransportes.

Diese Korrektur wurde bereits mit einem gewissen Erfolg auf den klassischen Testfall einer zurückspringenden Stufe und den der Strömung über einen 2-dimensionalen Hügel eingesetzt. Diese beiden Testfälle werden auch in dieser Arbeit behandelt, so daß genauere Ergebnisse noch mitgeteilt werden. SHIH und ZHU [ZS93] zeigen wiederum, daß das RNG-Modell bei der Berechnung eingeschlossener paralleler Strahlströmungen (confined coflow jets) keine Verbesserungen gegenüber dem Standard k - ϵ -Modell ergab.

2.9.2 Das Modell von Shih et al

Die erste eigenständige Modellierung der Dissipationsgleichung wurde von SHIH ET AL [S⁺94] vorgeschlagen, die zusammen mit dem C_μ -Ansatz (2.63) ein neues lineares k - ϵ -Modell darstellt.

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \rho C_{\epsilon,1} \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \epsilon - \rho C_{\epsilon,2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \quad (2.73)$$

$$C_{\epsilon,1} = \max \left(0.43, \frac{\eta}{5 + \eta} \right) \quad C_{\epsilon,2} = 1.90 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\epsilon = 1.2 \quad (2.74)$$

Der Unterschied zur Standardmodellierung besteht in dem Produktionsterm, in dem die Reynoldsschen Spannungen nicht mehr auftreten. Die ϵ -Produktion ergibt sich allein aus dem Deformationsfeld. Die fundamentale Annahme des lokalen Gleichgewichts in der Turbulenzenergiebilanz entfällt damit.

Außerdem ist der Koeffizient $C_{\epsilon,1}$ ebenfalls eine vom lokalen Strömungsfeld abhängige Größe (Abb.2.1). Der Koeffizient wird mit zunehmendem η zunächst kleiner um dann auf einem konstanten Wert 0.43 stehen zu bleiben. Im Gegensatz zum RNG-Modell, bei dem die Anpassung an das lokale Strömungsfeld nur über $C_{\epsilon,1}$ erfolgt, wird hier die Turbulenzproduktion zusätzlich über C_μ korrigiert.

SHIH ET AL [S⁺94] zeigen für verschiedener Strömungen (Grenzschichtströmungen mit negativen und positiven Druckgradienten, runder und ebener Freistrah, zurückspringende Stufe), daß dieses Modell entweder vergleichbare oder aber signifikant bessere Ergebnisse als das Standard k - ϵ -Modell liefert. Diese neue Formulierung der Dissipationsgleichung wird zusammen mit dem C_μ -Ansatz (2.63) verwendet. Aus der Originalarbeit [S⁺94] geht nicht hervor, ob die Verbesserungen auf die C_μ -Funktion oder auf die neue Dissipationsgleichung zurückzuführen sind.

2.10 Zusammenfassung der Modelle

Aufgrund der Vielzahl der Turbulenzmodelle erscheint es hilfreich, die Modelle noch einmal kurz zusammenzufassen und die jeweilige Bezeichnung festzulegen.

Zunächst sind die neuen linearen Modelle nach YAKHOT [Y⁺92] und SHIH ET AL [S⁺94] zu nennen, deren wesentlicher Unterschied zum Standard k - ϵ -Modell in der Modifikation

der Dissipationsgleichung liegt und bei dem Modell von SHIH ET AL zusätzlich in der Verwendung eines vom lokalen Strömungsfeld abhängigen C_μ .

Tabelle 2.2: Nomenklatur der untersuchten linearen k - ϵ -Modelle.

Bezeichnung	Bemerkung	Kapitel
SKE	Standard k - ϵ -Modell	2.2
RNG	RNG-Version des k - ϵ -Modells	2.9.1
NKE	Neues k - ϵ -Modell nach SHIH ET AL	2.9.2

Tabelle 2.3: Nomenklatur der algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle, wobei für xxx die jeweilige Bezeichnung des DSK-Modells einzusetzen ist.

Bezeichnung	Algebraisierungsansatz	explizite Lösung	Kapitel
GS-xxx	Gatski-Speziale (Gl.2.25)	Gatski-Speziale	2.7.3
GIR-xxx	Gatski-Speziale (Gl.2.25)	Girimaji	2.7.4
TB-xxx	Taulbee (Gl.2.28)	Girimaji	2.7.4

Tabelle 2.4: Nomenklatur der untersuchten nichtlinearen k - ϵ -Modelle.

Bezeichnung	Bemerkung	Kapitel
SP	konstante Koeffizienten	2.8.1
RB	konstante Koeffizienten	2.8.1
SZL	Koeffizienten $=f(\eta, \xi)$	2.8.3

Zur zweiten Gruppe zählen alle nichtlinearen algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle. Zu unterscheiden ist dabei zunächst der Ansatz, der zur Algebraisierung der Transportgleichung der turbulenten Spannungen verwendet wurde, also der Ansatz von GATSKI ET AL (2.25) und der Ansatz von TAULBEE (2.28).

Die aus diesen Ansätzen resultierenden impliziten algebraischen Gleichungen werden anschließend zur Bestimmung der Koeffizienten des Reihenansatzes (2.38) verwendet. Dafür wurden wiederum drei verschiedene Lösungen angegeben. Zum einen die semi-explizite Lösung von POPE (Kap.2.7.2), die linearisierte und regularisierte Lösung von GATSKI und SPEZIALE (Kap.2.7.3) und zuletzt die vollständig explizite Lösung von GIRIMAJI (Kap.2.7.4).

Da die explizite Lösung von GIRIMAJI identisch mit der semi-expliziten Lösung von POPE ist, braucht letztere im folgenden nicht weiter betrachtet werden. Im Grunde ist auch die linearisierte und regularisierte Lösung von GATSKI und SPEZIALE durch die Existenz der

vollständig expliziten Lösung überflüssig geworden. Dieses Modell wurde aber als einziges dieser Modelle bereits auf komplexe Strömungen angewendet, so daß, um den Anschluß an diese Arbeiten herzustellen, diese Lösung weiter betrachtet wird. Allerdings nur in Kombination mit dem Algebraisierungsansatz von GATSKI und SPEZIALE.

Da GIRIMAJI [Gir95] in seiner Originalarbeit lediglich den Algebraisierungsansatz von GATSKI und SPEZIALE (2.25) verwendet, wird auch nur diese Modellkombination mit GIR bezeichnet. Die explizite Lösung von Girimaji für den TAULBEE-Ansatz (2.28) wird im folgenden mit TB gekennzeichnet. Diese werden zum einen in ihrer vollständigen Form als nichtlineares Modell untersucht, zum anderen aber auch als lineare Modelle, bei denen der nichtlineare Term vernachlässigt wird. Die Unterscheidung wird jeweils gesondert angegeben.

Weiterhin ist noch die jeweils verwendete Druck-Scher-Korrelation zu unterscheiden, aus der die Koeffizienten folgen. Die Bezeichnung der DSK-Modelle und der einzusetzenden Koeffizienten ist in Tabelle 2.1 gegeben.

Als letztes sind noch das nichtlineare Modell von SHIH ET AL [SZL93] und die nichtlinearen Modelle mit konstanten Koeffizienten zu erwähnen (Tabelle 2.4).

Grundsätzlich besteht die Möglichkeit, die algebraischen Modelle mit den modifizierten Modellen der Dissipationsgleichung zu kombinieren. Dieses würde jedoch eine vollständige Überarbeitung der Koeffizienten erfordern, da die den algebraischen Modellen zugrundeliegenden DSK-Modelle zusammen mit der Standard- ϵ -Gleichung entwickelt worden sind. Dabei sind je nach DSK-Modell unterschiedliche Koeffizienten einzusetzen. Die LRR- und GLIP-Versionen werden zusammen mit den Standardwerten $C_{\epsilon,1}=1.44$ und $C_{\epsilon,2}=1.92$ verwendet, die TB-Version mit $C_{\epsilon,1}=1.44$ und $C_{\epsilon,2}=1.90$ und die SSG-Version mit $C_{\epsilon,1}=1.44$ und $C_{\epsilon,2}=1.83$.

Diese Modelle werden im folgenden Abschnitt hinsichtlich ihrer elementaren Eigenschaften untersucht. Im letzten Kapitel folgen dann einige Anwendungen.

3 Elementare Eigenschaften der Modelle

3.1 Homogene Scherströmungen

In einer vollständig homogenen turbulenten Strömung vereinfacht sich die Transportgleichung der Turbulenzenergie (Gl.2.7) durch Wegfall aller räumlichen Gradienten zu

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\epsilon . \quad (3.75)$$

Stationarität und Homogenität sind offenbar zwei sich ausschließende Bedingungen, die Turbulenz würde zum Erliegen kommen. Unter einer homogenen Scherströmung versteht man eine Strömung, in der alle turbulenten Kenngrößen und der Geschwindigkeitsgradient $U_{1,2}$ homogen verteilt sind. In der Bilanzgleichung der Turbulenzenergie tritt dann zusätzlich der Produktionsterm P_k auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} &= P_k - \epsilon \\ &= -\overline{u_1 u_2} U_{1,2} - \epsilon . \end{aligned} \quad (3.76)$$

Solche homogenen Scherströmungen sind, obwohl schwer zu realisieren, vielfach experimentell untersucht worden. In dieser Arbeit werden die experimentellen Arbeiten von TAVOULARIS ET AL [TC81, TK89] und DE SOUZA ET AL [SNT95] verwendet. Als Vergleich steht außerdem die Large Eddy Simulation von BARDINA ET AL [BFR83] zur Verfügung.

3.1.1 Bilanzgleichungen

In einer homogenen Scherströmung folgt mit $S = U_{1,2}$ und $P_k/\epsilon = -2b_{12}\eta$ aus Gl.(2.32)

$$\frac{D\eta}{Dt^*} = \frac{d\eta}{dt^*} = 2(C_{\epsilon,1} - 1)\eta b_{12} + C_{\epsilon,2} - 1, \quad (3.77)$$

mit

$$\eta = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} = \frac{k}{\epsilon} S \quad \text{und} \quad t^* = St .$$

Da die nichtlinearen Terme der algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle keinen Beitrag zur Schubspannung liefern, kann man mit $b_{12} = -\frac{1}{2}C_\mu\eta$ auch schreiben

$$\frac{\partial \eta}{\partial t^*} = -C_\mu(C_{\epsilon,1} - 1)\eta^2 + C_{\epsilon,2} - 1 \quad (3.78)$$

und für die neue Modellierung der Dissipationsgleichung nach SHIH ET AL (Gl.2.73)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t^*} = -C_{\epsilon,1}\eta + C_\mu\eta^2 + C_{\epsilon,2} - 1 . \quad (3.79)$$

Führt man weiterhin die Normierung $k^* = k/k_0$ ein, so erhält man für die Bilanzgleichung der Turbulenzenergie

$$\frac{\partial k^*}{\partial t^*} = k^* \left(-2b_{12} - \frac{1}{\eta} \right) \quad (3.80)$$

und bei Verwendung algebraischer Reynolds-Spannungsmodelle den einfacheren Ausdruck

$$\frac{\partial k^*}{\partial t^*} = k^* \left(C_\mu \eta - \frac{1}{\eta} \right). \quad (3.81)$$

An dieser Stelle wird der grundsätzliche Unterschied zwischen den algebraischen und differentiellen Reynolds-Spannungsmodellen deutlich. Letztere erfordern die gekoppelte Lösung der Transportgleichung (2.23), der η -Gleichung (3.77) und der k -Gleichung (3.80). Bei den algebraischen Reynolds-Spannungsmodellen ist die Schubspannung und damit die Turbulenzproduktion von den turbulenten Normalspannungen entkoppelt, so daß lediglich die η -Gleichung (3.78) bzw. (3.79) zusammen mit der k -Gleichung (3.81) gelöst werden muß. Die turbulenten Normalspannungen ergeben sich in diesem Fall aus den algebraischen Ausdrücken

$$b_{11} = \left(\frac{C_1}{24} + \frac{C_2}{4} + \frac{C_3}{24} \right) \eta^2 \quad (3.82)$$

$$b_{22} = \left(\frac{C_1}{24} - \frac{C_2}{4} + \frac{C_3}{24} \right) \eta^2. \quad (3.83)$$

In den folgenden Untersuchungen wurden die Bilanzgleichungen mit einem Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung gelöst.

3.1.2 Evolution der Turbulenzenergie

Mit Hilfe der Large Eddy Simulation wurde von BARDINA ET AL [BFR83] die zeitliche Entwicklung der Turbulenzenergie in einer homogenen Scherströmung untersucht. Eine am Anfang isotrope Turbulenz k_0 wurde einer konstanten Scherdeformation S ausgesetzt. Zusätzlich zu der Scherdeformation wurde in einigen Fällen die homogene Strömung einer Rotation Ω unterworfen, deren Einfluß auf die Turbulenzenergie je nach Verhältnis Ω/S stabilisierend oder destabilisierend ist (Abb.3.2).

Die Anfangsbedingungen lauten in allen Fällen:

$$k^*(t^* = 0) = 1.0 \quad \eta(t^* = 0) = \frac{Sk_0}{\epsilon_0} = 3.37 \quad b_{ij}(t^* = 0) = 0.0 \quad (3.84)$$

Numerische und experimentelle Untersuchungen zeigen, daß eine Stabilisierung, also Relaminarisierung der Turbulenz, erst für $\Omega/S > 0.5$ eintritt [SSG91]. Mit wachsendem Ω/S wird die Turbulenz zunächst energiereicher, d.h. die zusätzliche Rotation bewirkt eine Destabilisierung. Ab einem bestimmten Verhältnis Ω/S wird die Destabilisierung durch die Rotation kleiner und die Wachstumsrate der Turbulenzenergie sinkt. Bei $\Omega/S \approx 0.5$ bleibt die Turbulenzenergie ungefähr konstant, für $\Omega/S > 0.5$ setzt die Relaminarisierung ein. Eine weitergehende Diskussion der rotierenden homogenen Scherströmung ist in [SSG91] zu finden, im Rahmen dieser Arbeit genügt es, die wesentlichen Tendenzen anzugeben.

Ein Vergleich der berechneten zeitlichen Entwicklung der Turbulenzenergie mit den Large Eddy Ergebnissen von BARDINA ET AL ist den Abbildungen 3.3 bis 3.5 zu entnehmen.

1. Das Standard k - ϵ -Modell und die RNG-Version ergeben selbst für den Fall der reinen Scherströmung ein zu starkes Anwachsen der Turbulenzenergie. Der Einfluß der

Rotation wird überhaupt nicht berücksichtigt; es wird in allen Fällen die gleiche Wachstumsrate berechnet.

2. Das SZL-Modell liefert zwar eine bessere Übereinstimmung für $\Omega/S = 0$ und auch für $\Omega/S = 0.5$, die starke Destabilisierung der Turbulenz bei $\Omega/S = 0.25$ wird jedoch nicht richtig wiedergegeben. Die Relaminarisierung setzt bereits bei $\Omega/S > 1/8$ und damit viel zu früh ein.
3. Eine insgesamt bessere Übereinstimmung mit den LES-Ergebnissen ergibt das NKE-Modell. Der Einfluß der Rotation wird tendenziell richtig berücksichtigt (Faktor 3 vor dem Ω im Rotationstensor, anstelle 4 beim SZL-Modell). Das Anwachsen bei $\Omega/S = 0.25$ ist allerdings zu schnell, außerdem tritt die Stabilisierung der Turbulenz auch hier etwas zu früh ein ($\Omega/S > 3/8$).
4. Auffällig sind die großen Unterschiede zwischen dem differentiellen SSG-Modell (RSM-SSG) und den anderen RSM-Modellen. Das SSG-Modell liefert in allen Fällen eine vergleichsweise gute Übereinstimmung mit den LES-Daten. Interessant ist vor allem, daß das SSG-Modell im Gegensatz zu allen anderen Modellen bei $\Omega/S = 0.5$ noch eine leichte Destabilisierung der Turbulenz ergibt, während die auf dem LRR-Modell basierenden Versionen (LRR, GLIP, TB) eine zu frühe Stabilisierung berechnen. Dieses spiegelt die sorgfältige Anpassung des SSG-Modells an homogene turbulente Strömungen wieder.
5. Allen algebraischen Modellen ist gemeinsam, daß sie das anfängliche Absinken der Turbulenzenergie nicht wiedergeben. Dieses ist auf die zu schnelle Reaktion der Modelle auf die einsetzende Scherdeformation S zurückzuführen. Dieses Verhalten wird andererseits von den Modellen, die auf der vollständigen Transportgleichung (RSM-xxx) beruhen, richtig beschrieben.
6. Mit wachsendem t^* nähern die algebraischen Modelle sich den differentiellen wieder an, wobei die größten Abweichungen bei $\Omega/S = 0.25$ zu finden sind. Interessant ist, daß die auf dem SSG-Modell basierenden algebraischen Modelle eine recht gute Übereinstimmung untereinander zeigen, während insbesondere die GLIP-Versionen stark voneinander abweichen.

Festzuhalten bleibt, daß das RSM-SSG-Modell die mit Abstand beste Übereinstimmung mit den LES-Daten von BARDINA ET AL [BFR83] zeigt. Dieses gilt mit Einschränkung auch für die entsprechenden algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle. Alle Modelle, mit Ausnahme des Standard k - ϵ - und RNG-Modells, geben den stabilisierenden bzw. destabilisierenden Einfluß der Rotation zumindest qualitativ richtig wieder.

3.1.3 Asymptotisches Verhalten der Modelle

Hinsichtlich des asymptotischen Verhaltens der Modelle sollen zwei Aspekte behandelt werden. Dies ist zum einen die schon angesprochene Frage, inwieweit die algebraischen Modelle GIR und TB eine gute Näherung an die vollständige Transportgleichung darstellen. Zum zweiten existiert für das zu lösende System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen ein Fixpunkt, d.h. ein Punkt an dem die zeitlichen Ableitungen von η und b_{ij} verschwinden. Weil die bei der Herleitung der algebraischen Modelle getroffenen

Annahmen in homogenen Scherströmungen erfüllt sind, sollte man erwarten, daß in diesem einfachen Fall die algebraischen Modelle in der Tat eine gute Näherung an die Transportgleichungen darstellen.

Analog zum vorherigen Abschnitt lauten die Anfangsbedingungen nun:

$$\eta(t^* = 0) = \frac{Sk_0}{\epsilon_0} = 0.0 \quad b_{ij}(t^* = 0) = 0.0 \quad (3.85)$$

Die Lösung für alle vier DSK-Modelle ist in den Abbildungen 3.6 und 3.7 dargestellt. Es ist offensichtlich, daß der Ansatz von TAULBEE für kleine η eine erheblich bessere Näherung an die vollständige Transportgleichung darstellt, soweit es die Normalspannungskomponenten b_{11} und b_{22} betrifft. Bezüglich der turbulenten Schubspannung stellt der TAULBEE-Ansatz keine entscheidende Verbesserung dar. Beide Ansätze liefern für große η eine vergleichbar gute Approximation der Transportgleichung. Das linearisierte Modell von GATSKI und SPEZIALE weicht hingegen für kleine und mittlere η stark von der vollständigen Transportgleichung ab und liefert nur asymptotisch eine gute Approximation.

Die zum asymptotischen Grenzwert η_∞ gehörenden Anisotropiekoeffizienten sind in den Tabellen 3.6, 3.7 und 3.8 zusammengefaßt. Zum Vergleich sind die von TAVOULARIS ET AL experimentell bestimmten Werte in Tabelle 3.5 angegeben.

Tabelle 3.5: Experimentelle Anisotropiefaktoren für η_∞ in homogener Scherströmung.

Experiment	η_∞	b_{11}	b_{22}	b_{12}	Quelle
TC	6.25	0.200	-0.150	-0.140	[TC81]
TK	4.30	0.220	-0.160	-0.130	[TK89]
SNT	7.70	0.180	-0.120	-0.110	[SNT95]

Die experimentellen Arbeiten von TAVOULARIS ET AL zeigen, daß sich homogene Scherströmungen mit sehr unterschiedlichen Gleichgewichtswerten η_∞ realisieren lassen. Dieser Wert stellt für die Turbulenzmodelle wiederum einen charakteristischen Kennwert dar, er kann aber offensichtlich nicht zur Beurteilung der Modelle dienen. Das wohl wichtigste Ergebnis der Untersuchungen von TAVOULARIS ET AL ist der Befund, daß die Anisotropiefaktoren für alle η_∞ ähnliche Werte annehmen, die Anisotropiefaktoren also weitestgehend unabhängig von η sind.

Es ist offensichtlich, daß ein Turbulenzmodell solch ein Verhalten nur dann wiedergeben kann, wenn die Koeffizienten variabel sind. Wegen $b_{12} \propto \eta$ bzw. $b_{ii} \propto \eta^2$ sollte ein funktionaler Zusammenhang der folgenden Form gelten:

$$C_\mu \propto f\left(\frac{1}{\eta}\right) \quad C_i \propto f\left(\frac{1}{\eta^2}\right) \quad (3.86)$$

Tabelle 3.6: Anisotropiefaktoren für η_∞ in homogener Scherströmung.

Modell	η_∞	C_μ	b_{11}	b_{22}	b_{12}
SKE	4.82	0.090			-0.217
RNG	4.33	0.085			-0.184
NKE	5.34	0.065			-0.174
SP	4.82	0.090	0.372	-0.263	-0.217
RB	4.33	0.085	0.256	-0.193	-0.184
SZL	6.55	0.048	0.156	-0.095	-0.159

Tabelle 3.7: Anisotropiefaktoren für η_∞ in homogener Scherströmung

Modell	η_∞	C_μ	b_{11}	b_{22}	b_{12}
GIR-LRR	5.56	0.067	0.156	-0.122	-0.187
TB-LRR	5.56	0.067	0.156	-0.122	-0.187
GS-LRR	5.56	0.067	0.156	-0.122	-0.187
GIR-GLIP	5.64	0.065	0.193	-0.096	-0.185
TB-GLIP	5.64	0.065	0.193	-0.096	-0.185
GS-GLIP	5.64	0.065	0.193	-0.096	-0.185
GIR-SSG	5.98	0.052	0.204	-0.148	-0.157
TB-SSG	5.98	0.052	0.204	-0.148	-0.157
GS-SSG	5.98	0.052	0.204	-0.148	-0.157
GIR-TB	6.44	0.049	0.154	-0.147	-0.158
TB-TB	6.44	0.049	0.154	-0.147	-0.158
GS-TB	6.44	0.049	0.154	-0.147	-0.158

Dieses erklärt dann auch die überhöhten Anisotropiefaktoren des Standard $k-\epsilon$ -, des RNG-, des SP- und RB-Modells, bei denen die konstanten Koeffizienten für den charakteristischen Wert $\eta = 3.3$ einer Wandgrenzschichtströmung bestimmt worden sind. Die asymptotischen Grenzwerte der algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle sind ansonsten praktisch identisch mit denen der differentiellen Reynolds-Spannungs-Modelle.

Bei allen Modellen ist die Schubspannung tendenziell zu groß, signifikant ist dies vor allem bei der LRR- und GLIP-Version. Alle Modelle ergeben eine brauchbare Approximation

Tabelle 3.8: Anisotropiefaktoren für η_∞ in homogener Scherströmung

Modell	η_∞	b_{11}	b_{22}	b_{12}
RSM-LRR	5.56	0.155	-0.122	-0.187
RSM-GLIP	5.64	0.192	-0.096	-0.185
RSM-SSG	5.95	0.203	-0.148	-0.157
RSM-TB	6.41	0.154	-0.147	-0.158

der Anisotropie der turbulenten Normalspannungen, wobei allerdings nur die SSG-Version auch die absoluten Werte gut wiedergibt.

3.2 Ungleichgewichtszustände

Alle algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle basieren auf der fundamentalen Annahme eines lokalen Gleichgewichts zwischen Produktion und Destruktion, also der Vernachlässigung des konvektiven und diffusiven Transportes in den Transportgleichungen der turbulenten Spannungen. Die aus der Vernachlässigung dieser Terme resultierenden in b_{ij} impliziten algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle zeigen, daß C_μ i.a. eine Funktion der Form

$$C_\mu = f\left(1/\frac{P_k}{\epsilon}\right) \quad (3.87)$$

ist. Der Koeffizient C_μ ist also keinesfalls eine Konstante, auch dann nicht, wenn auf die Transportgleichungen die Gleichgewichtannahme angewendet wird. Die Turbulenzenergie und die Dissipation werden aus ihren jeweiligen Bilanzgleichungen bestimmt, so daß sich in der Strömung prinzipiell beliebige P_k/ϵ -Verhältnisse einstellen können. Nur für $P_k/\epsilon = 1$ stellt $C_\mu = 0.09$ einen sinnvollen Wert dar, und das auch nur für einige einfache Scherströmungen.

Im Gegensatz zum Standard k - ϵ -Modell sind bei den in dieser Arbeit untersuchten algebraischen Reynolds-Spannungsmodellen die Koeffizienten keine Konstanten mehr, sondern eine mehr oder weniger komplizierte Funktion des lokalen Strömungsfeldes.

Für alle linearen Modelle gilt der Zusammenhang

$$\frac{P_k}{\epsilon} = C_\mu \eta^2, \quad (3.88)$$

wobei C_μ eine Funktion der Form

$$C_\mu = C_\mu(\eta, \xi) \quad (3.89)$$

ist und mit (Gl.3.88) ist dieses gleichbedeutend mit

$$C_\mu = C_\mu\left(1/\frac{P_k}{\epsilon}, \xi\right). \quad (3.90)$$

Physikalisch ist also die Abhängigkeit des Koeffizienten C_μ (und auch aller anderen Koeffizienten) vom lokalen Strömungsfeld so zu interpretieren, daß sie eine Anpassung der algebraischen Beziehung zwischen den turbulenten Spannungen und dem Geschwindigkeitsfeld an das lokale P_k/ϵ darstellen. Es werden also Ungleichgewichtszustände in der Turbulenzenergiebilanz berücksichtigt. Die Gleichgewichtsannahme in der Bilanz der turbulenten Spannungen bleibt davon unberührt.

Unter einfachen Scherströmungen sollen hier Strömungen verstanden werden, in denen der Geschwindigkeitsgradient $U_{1,2}$ dominiert und alle anderen Geschwindigkeitsgradienten klein sind. Experimente in ebenen und runden Freistrahlsströmungen, Mischungsgrenzschichten, homogenen Scherströmungen und einfachen Wandgrenzschichtströmungen zeigen, daß der Koeffizient C_μ für kleine P_k/ϵ durchaus Werte um 0.3 erreichen kann [LR81, Rod] und mit zunehmendem P_k/ϵ kleiner wird. In homogenen Scherströmungen, in denen P_k/ϵ je nach Experiment zwischen 1.7 und 2.1 liegt, findet man C_μ -Werte um 0.05. Ähnlich niedrige C_μ -Werte findet man auch in Nachlaufströmungen [Rod].

In einfachen Scherströmungen gilt $\eta = \xi$ und mit $P_k/\epsilon = C_\mu \eta^2$ können die algebraischen Ausdrücke für C_μ entweder iterativ (falls $C_\mu = f(P_k/\epsilon)$) oder explizit ausgewertet werden. Die sich ergebende Abhängigkeit des Koeffizienten C_μ vom Quotienten P_k/ϵ ist in der Abbildung 3.8 dargestellt. Zum Vergleich ist jeweils der Wert $C_\mu = 0.09$ des Standard k - ϵ -Modells eingetragen.

1. Alle algebraischen Modelle ergeben eine qualitativ korrekte reziproke Abhängigkeit des Koeffizienten C_μ vom Quotienten P_k/ϵ .
2. Das SZL-Modell liefert zu große Werte für kleine P_k/ϵ , während das NKE-Modell sich mehr im Rahmen der experimentelle Daten bewegt. Für große P_k/ϵ nähern sich die Modelle wieder an.
3. Das linearisierte und regularisierte semi-explizite Modell nach GATSKI und SPEZIALE (GS) zeigt nur eine schwache Variation für kleine P_k/ϵ , mit wachsendem P_k/ϵ ist C_μ eindeutig zu klein. Dieses gilt für alle DSK-Modelle.
4. Das GIRIMAJI-Modell (GIR) liefert in der LRR- und GLIP-Version insgesamt zu große C_μ . Die TB-Version zeigt eine relativ starke Abhängigkeit von P_k/ϵ , vor allem für kleine P_k/ϵ . Die SSG- und TB-Version bleiben aber im Rahmen der experimentellen Daten.
5. Der TAULBEE-Ansatz (TB-xxx) führt zu etwas kleineren C_μ als das GIRIMAJI-Modell, wobei insbesondere die SSG-Version mit steigendem P_k/ϵ unrealistisch niedrige Werte liefert.

Im allgemeinen können η und ξ jedoch beliebige Werte annehmen. Außerdem gibt es keinen eindeutigen Zusammenhang zwischen P_k/ϵ und C_μ , je nach Strömungsfeld kann C_μ durchaus verschiedene Werte für gleiche P_k/ϵ annehmen. Als zusätzlicher Parameter, neben η bzw. P_k/ϵ , tritt die dimensionslose Invariante ξ des Rotationstensors in den funktionalen Ausdrücken für C_μ auf. Dieser Parameter ermöglicht eine weitere Unterscheidung verschiedener Turbulenzstrukturen.

Eine graphische Darstellung der Abhängigkeit $C_\mu = f(\eta, \xi)$ ist in den Abbildungen 3.9 bis 3.12 gegeben. Der schon besprochene Zusammenhang $C_\mu = f(P_k/\epsilon)$ der einfachen Scherströmung mit $\eta = \xi$ entspricht gerade der Diagonalen in diesen Darstellungen. In realen Strömungen wird in aller Regel $\eta \geq \xi$ sein, so daß der Bereich unterhalb der Diagonalen von Interesse ist. Das unsinnige Verhalten des GIR- und TB-Modell für $\eta \rightarrow 0$ und große ξ ist ohne praktische Bedeutung.

Das NKE-Modell liefert eine symmetrische Abhängigkeit von η und ξ , die strukturell denen der komplizierteren algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle GIR und TB ähnlich ist. Das SZL-Modell weicht hier ein wenig von den anderen Modellen ab, als grobe Näherung ist die Verteilung aber noch akzeptabel, jedenfalls im Vergleich zum konstanten Wert $C_\mu = 0.09$ des Standard k - ϵ -Modells.

Das GIRIMAJI-Modell und die analoge Lösung nach dem TAULBEE-Ansatz ergeben sehr ähnliche Verteilungen. Das GIRIMAJI-Modell weist allerdings eine erheblich stärkere Abhängigkeit von η auf. Interessant ist, daß die η -Abhängigkeit durch die Linearisierung nach GATSKI und SPEZIALE fast völlig verloren geht. Im vorletzten Abschnitt dieses Kapitels wird gezeigt, daß dies keine wünschenswerte Eigenschaft ist.

3.3 Anisotropie der turbulenten Normalspannungen

3.3.1 Ebene Kanalströmung

Ein bekanntes Problem aller linearen Modelle und so auch des Standard k - ϵ -Modells ist die ungenügende Modellierung der turbulenten Normalspannungen. Dies läßt sich sehr gut anhand der Anisotropiefaktoren einer vollständig eingelaufenen ebenen Kanalströmung zeigen. Zum Vergleich stehen die mittels DNS von KIM ET AL [KMM87] berechneten Anisotropiefaktoren zur Verfügung (Tabelle 3.9). Die mit den Modellen für $\eta = 3.3$ berechneten Anisotropiefaktoren sind in Tabelle 3.10 zusammengefaßt.

Tabelle 3.9: Anisotropiefaktoren in einer ebenen Kanalströmung nach der DNS von KIM ET AL [KMM87].

DNS	b_{11}	b_{22}	b_{12}
KIM ET AL	0.175	-0.145	-0.145

Die linearen Modelle NKE und RNG stehen ebenso wie das Standard k - ϵ -Modell bezüglich b_{12} in guter Übereinstimmung mit den DNS-Werten. Alle linearen Modelle liefern jedoch im Widerspruch zur Physik $b_{11} = 0$ und $b_{22} = 0$.

Es fällt auf, daß die LRR- und GLIP-Versionen des GIRIMAJI- und TAULBEE-Modells relativ große b_{12} ergeben, wohingegen die jeweiligen SSG- und TB-Versionen besser mit den DNS-Daten übereinstimmen, dieses gilt insbesondere für die TB-Versionen. Das GS-Modell tendiert zu zu niedrigen b_{12} .

Alle nichtlinearen Modelle liefern $b_{ii} \neq 0$, wobei der Grad der Anisotropie sehr unterschiedlich ist. Die Normalspannungen sind i.a. zu klein und die Differenz der Normalspannungen wird unterschätzt. Die beste Übereinstimmung mit den DNS-Daten erhält man jeweils mit den SSG-Versionen. Das SP- und RB-Modell ergeben in diesem Fall ebenfalls realistische Anisotropiefaktoren, was letztlich darauf zurückzuführen ist, daß sie eben an diesen speziellen Fall angepaßt worden sind. Sobald η wesentlich von $\eta = 3.3$ abweicht, wird, wie bereits früher gezeigt, diese Übereinstimmung schlecht er.

Welche Rolle die Differenz der turbulenten Normalspannungen spielt, kann man sehr leicht anhand der Bilanzgleichung der Stromfunktion ψ verdeutlichen. Mit

$$U_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad U_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (3.91)$$

Tabelle 3.10: Anisotropiefaktoren in einer ebenen Kanalströmung ($\eta = 3.3$).

Modell	b_{11}	b_{22}	b_{12}
SKE			-0.148
RNG			-0.140
NKE			-0.150
SZL	0.049	-0.029	-0.146
GS-LRR	0.070	-0.055	-0.143
GS-GLIP	0.081	-0.040	-0.132
GS-SSG	0.099	-0.072	-0.138
GS-TB	0.063	-0.059	-0.125
GIR-LRR	0.136	-0.107	-0.181
GIR-GLIP	0.156	-0.078	-0.173
GIR-SSG	0.136	-0.099	-0.151
GIR-TB	0.120	-0.114	-0.153
TB-LRR	0.104	-0.082	-0.166
TB-GLIP	0.120	-0.060	-0.158
TB-SSG	0.115	-0.084	-0.145
TB-TB	0.089	-0.086	-0.142
SP	0.174	-0.124	-0.148
RB	0.148	-0.112	-0.140

erhält man nach kreuzweisem Ableiten und Subtraktion der beiden Impulsbilanzen die gesuchte Bilanzgleichung der Stromfunktion.

$$\frac{\partial \nabla \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 \psi = \nu \nabla^4 \psi - \frac{\partial^2 (\overline{u_2^2} - \overline{u_1^2})}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \overline{u_1 u_2}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{u_1 u_2}}{\partial x_2^2} \quad (3.92)$$

Die Differenz der turbulenten Normalspannungen geht demnach unmittelbar in die Impulsbilanz ein. In einfachen Grenzschichtströmungen spielt dies eine untergeordnete Rolle, in Strömungen mit starker Stromlinienkrümmung kann diese Normalspannungsdifferenz sich jedoch bemerkbar machen.

In einer allgemeinen 2D-Strömung findet man für die Differenz der turbulenten Normalspannungen

$$\overline{u_2^2} - \overline{u_1^2} = 2C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} U_{1,1} + C_2 \frac{k^3}{\epsilon^2} (U_{1,2}^2 + U_{2,1}^2) \quad (3.93)$$

Die Anisotropie der turbulenten Normalspannungen hängt also außer von C_μ nur von C_2 ab. Der Koeffizient C_2 (Tabelle 3.11) schwankt zwischen 0.0144 (SZL) und 0.043 (GIRSSG) bzw. 0.055 (SP), also um mehr als einen Faktor 3. Auch hinsichtlich der übrigen Koeffizienten besteht eine erhebliche Diskrepanz zwischen den Modellen.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß lineare Modelle zwar $b_{11} = b_{22} = 0$ liefern, dieses aber nicht bedeutet, daß die Normalspannungsdifferenz gleich Null ist.

Es ist an dieser Stelle noch nicht möglich, den tatsächlichen Einfluß der realistischeren Modellierung der turbulenten Normalspannungen zu quantifizieren. Dieser Sachverhalt wird im folgenden anhand der Strömung in einem quadratischen Kanal und später bei der Anwendung auf komplexe Kanalströmungen weiter diskutiert.

3.3.2 Sekundärströmungswirbel in einem quadratischen Kanal

Das Auftreten von Sekundärströmungen in nicht-kreisförmigen Kanälen ist ein bekanntes Phänomen, das unmittelbar auf die Anisotropie der turbulenten Normalspannungen zurückzuführen ist. Dieses läßt sich für eine vollständig entwickelte Strömung, d.h. $\partial/\partial x_1 = 0$, sehr leicht anhand der axialen Wirbeltransportgleichung zeigen.

Mit der axialen Wirbelstärke

$$\Omega_1 = U_{2,3} - U_{3,2} \quad (3.94)$$

erhält man

$$U_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_3} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_3^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\overline{u_3^2} - \overline{u_2^2}) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \overline{u_2 u_3} \quad (3.95)$$

Eine sekundärströmungsfreie Kanalströmung, also $U_2 = U_3 = 0$, ist demnach nur möglich, wenn $\overline{u_2^2} - \overline{u_3^2} = \text{const}$ entlang x_2 und x_3 und $\overline{u_2 u_3} = 0$ ist. Dieses ist in turbulenten Kanalströmungen jedoch nicht der Fall. Interessant ist, daß die Differenz der turbulenten

Normalspannungen in die Impulsbilanz eingeht, nicht aber der absolute Betrag der Normalspannungen.

DEMUREN und RODI [DR84] zeigen, daß die Normalspannungsdifferenz den Antrieb der Sekundärströmungen darstellt. Der Schubspannungsterm $\overline{u_2 u_3}$ wirkt andererseits den Sekundärströmungen entgegen. Tatsächlich sind der Schubspannungs- und Normalspannungsterm in den Impulsbilanzen der Sekundärströmungskomponenten im gesamten Strömungsfeld von gleicher Größenordnung. Die korrekte Ausbildung der Sekundärströmungswirbel erfordert daher eine recht genaue Modellierung dieses Kräfteverhältnisses.

Vernachlässigt man in den quadratischen Termen die lateralen Gradienten der Sekundär- geschwindigkeiten, so erhält man für die Differenz der lateralen turbulenten Normalspannungen

$$\overline{u_2^2} - \overline{u_3^2} = \frac{C_1 - 2C_2 + C_3 k^3}{4} \frac{k^3}{\epsilon^2} (U_{1,3}^2 - U_{1,2}^2). \quad (3.96)$$

Im Schubspannungsterm dürfen die Gradienten der Sekundärströmungsgeschwindigkeiten hingegen nicht vernachlässigt werden, weil sie dort im linearen Term auftreten.

$$\overline{u_2 u_3} = -C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} (U_{2,3} + U_{3,2}) + \frac{C_1 - 2C_2 + C_3 k^3}{4} \frac{k^3}{\epsilon^2} U_{1,2} U_{1,3} \quad (3.97)$$

DEMUREN und RODI [DR84] zeigen ferner, daß der lineare Anteil im Schubspannungsterm fast im gesamten Strömungsfeld überwiegt. Dieses erklärt sich damit, daß außer in der Ecke entweder $U_{1,2}$ oder $U_{1,3}$ sehr klein ist.

Damit wird deutlich, daß das Kräfteverhältnis zwischen Schubspannungs- und Normalspannungsterm von der richtigen Wahl des Koeffizienten C_μ und der Koeffizienten C_i abhängt. Die Koeffizienten vor dem nichtlinearen Term lassen sich zu einem einzigen Koeffizienten C_{eff} zusammenfassen. Dieser Wert ist dann ein Maß für die modellcharakteristische Differenz der turbulenten Normalspannungen, während C_μ die Schubspannungen dominiert. Die Koeffizienten sind für $\eta = 3.3$ in Tabelle 3.11 gegeben.

Berechnung der Sekundärströmungswirbel

Die Berechnung einer einlaufenden Strömung in einem quadratischen Kanal stellt einen erheblichen numerischen Aufwand dar, vor allem dann, wenn man die Berechnung mit einer hinreichenden numerischen Auflösung durchführen muß. Aus diesem Grunde wurde für diese Untersuchungen ein neues Programm zur Berechnung einer vollständig eingelaufenen Strömung entwickelt. Durch Wegfall aller axialen Gradienten vereinfacht sich das Problem auf einen essentiell 2-dimensionalen Strömungsfall mit einer entsprechenden Reduzierung des numerischen Aufwandes. Das numerische Verfahren ist im Anhang A beschrieben.

Das Strömungsfeld wurde mit 30×30 Elementen aufgelöst. Der Wandabstand des wandnächsten Knotens lag bei $y^+ \approx 100$ auf der Symmetrielinie und bei $y^+ \approx 60$ im Bereich der Ecke. Testrechnungen mit einem 40×40 -Netz ergaben nahezu identische Ergebnisse. Die Reynolds-Zahl betrug $Re = 250000$. Die Geometrie des Strömungskanals ist in Abbildung

Tabelle 3.11: Modellkoeffizienten für $\eta = 3.3$ in einer ebenen Kanalströmung.

Modell	C_μ	C_1	C_2	C_3	C_{eff}
SKE	0.090				
RNG	0.085				
NKE	0.091				
SZL	0.088	0.0029	0.0144	0.0183	0.0019
GS-LRR	0.087	0.0167	0.0231		0.0074
GS-GLIP	0.081	0.0459	0.0222		0.0000
GS-SSG	0.084	0.0295	0.0314		0.0084
GS-TB	0.076	0.0032	0.0224		0.0104
GIR-LRR	0.110	0.0324	0.0446		0.0142
GIR-GLIP	0.105	0.0864	0.0432		0.0000
GIR-SSG	0.092	0.0406	0.0403		0.0115
GIR-TB	0.093	0.0061	0.0430		0.0199
TB-LRR	0.101	0.0247	0.0342		0.0109
TB-GLIP	0.095	0.0661	0.0331		0.0000
TB-SSG	0.088	0.0343	0.0366		0.0097
TB-TB	0.086	0.0046	0.0322		0.0149
SP	0.090	0.0550	0.0550		0.0137
RB	0.085	0.2280	0.0480	-0.1880	0.0140

3.13 dargestellt.

Zum Vergleich stehen zum einen die experimentellen Untersuchungen von GESSNER und EMERY [GPE82], sowie die grundlegende numerische Arbeit von DEMUREN und RODI [DR84] zur Verfügung.

Die Höhenlinien der axialen Geschwindigkeitskomponente, die Sekundärströmungswirbel und die Wandschubspannungsverteilungen sind in den Abbildungen 3.14, 3.15 und 3.16 dargestellt. Die in diesem Zusammenhang relevanten Ergebnisse werden im folgenden besprochen.

Die Sekundärströmungswirbel bewirken eine Deformation des axialen Geschwindigkeitsfeldes, wobei die Höhenlinien auf der Diagonalen weiter in die Ecke hineingezogen werden und auf den Symmetrielinien weiter zur Kanalmitte wandern (Abb. 3.15). Zurückzuführen

ist dies auf den durch die Sekundärströmungswirbel (Abb. 3.14) verursachten Impulstransport in Richtung Ecke. Ein Vergleich der Höhenlinien der axialen Geschwindigkeitskomponente ist lediglich für die beiden Modelle gegeben, die zu den stärksten Sekundärströmungen führten. Offensichtlich ist auch in diesen Fällen die Deformation des Geschwindigkeitsfeldes noch nicht ausreichend. Zu dem gleichen Befund kommen auch DEMUREN und RODI [DR84] in ihrer Arbeit.

Weitere Hinweise hinsichtlich der Stärke der Sekundärströmungen liefert der Vergleich der Wandschubspannungsverteilung (Abb.3.16). Die Messung der Wandschubspannungsverteilung wurde der Arbeit von LUND [Lun77] entnommen.

1. Die linearen Modelle SKE, NKE und RNG liefern fast identische Wandschubspannungsverteilungen. Die Modifikation der Dissipationsgleichung oder die Verwendung eines variablen C_μ macht sich praktisch nicht bemerkbar.
2. Das SZL-Modell ist zwar in der Lage Sekundärströmungen zu erzeugen, letztere sind jedoch ausgesprochen schwach. Dieses steht in Übereinstimmung mit dem sehr kleinen Koeffizienten $C_{\text{eff}} = 0.0144$ und den schon bei der ebenen Kanalströmung festgestellten zu kleinen Anisotropiefaktoren.
3. Das GIR-, TB- und GS-Modell ergeben in allen Fällen sehr ähnliche Verteilungen, was verdeutlicht, daß die Sekundärströmungen ausschließlich durch die Wahl des DSK-Modells bestimmt werden.
4. Ein sehr interessanter Befund ist der, daß das GLIP-DSK-Modell keine Sekundärströmungen erzeugt. Der effektive Koeffizient ergibt sich in diesem Fall tatsächlich zu Null.
5. Die stärksten Sekundärströmungen liefert jeweils das TB-DSK-Modell, gefolgt von dem SSG- und zuletzt von dem LRR-Modell. Dieses erscheint auf den ersten Blick etwas überraschend, weil der Koeffizient C_{eff} des GIR-LRR-Modells mit 0.0142 z.B. genauso groß wie der entsprechende Wert der TB-TB-Modellkombination ist. Zurückzuführen sind die mit GIR-LRR berechneten schwächeren Sekundärströmungen auf den gleichzeitig recht großen Koeffizienten C_μ , der einen relativ großen Schubspannungsterm bewirkt.

Die recht gute Berechnung der Wandschubspannungsverteilung steht in einem gewissen Widerspruch zu der ungenauen Berechnung des axialen Geschwindigkeitsfeldes. Eine eindeutige Erklärung dafür kann nicht gegeben werden, möglicherweise hängt es aber damit zusammen, daß die Messungen verschiedenen Studien entnommen worden sind.

Der Vollständigkeit halber sind die Verteilung der axialen Geschwindigkeitskomponente und der Turbulenzenergie auf der Diagonalen und entlang der Symmetrielinie in den Abbildung 3.17 und 3.20 gegeben. Der Einfluß der Sekundärströmungswirbel ist eindeutig zu erkennen, je größer die Sekundärströmungen, desto besser ist die Übereinstimmung mit den Meßwerten. Auffällig ist die erheblich zu große Turbulenzenergie in der Ecke und die zu kleine Turbulenzenergie an der Wand. Wie Abbildung 3.18 zeigt, wird der Geschwindigkeitsgradient in der Ecke von allen Modellen zu groß berechnet und daher ist auch die Produktion der Turbulenzenergie zu groß. Umgekehrt ist es an der Wand

auf der Symmetrielinie, dort ist der wandsenkrechte Geschwindigkeitsgradient und damit auch die Turbulenzproduktion zu klein. Eine weitere mögliche Ursache liegt in der Angabe der Randbedingungen, also an der Wandfunktion für das Geschwindigkeitsfeld und der Gleichgewichtssannahme für die Turbulenzenergie und die Dissipation, die nach [DR84] tendenziell zu kleine k liefert.

Das SP- und RB-Modell bereiten erhebliche numerische Probleme. Trotz starker Unterrelaxation konnte keine konvergierte Lösung erzielt werden. Interessanterweise konnte bei den anderen Modellen mit variablen Koeffizienten nichts dergleichen festgestellt werden. Die numerischen Probleme bei dem SP- und RB-Modell traten eindeutig zuerst im Bereich der Ecke auf. Dort erreichen η und ξ Werte über 4, was zu unrealistisch großen turbulenten Spannungen ($\overline{u_i^2} \propto \eta^2$) führt. Bei der Anwendung dieser Modelle auf die Strömung über eine zurückspringende Stufe und auf die rezirkulierende Raumströmung, die mit dem kommerziellen CFD-Code FLOTRAN durchgeführt wurden, traten im übrigen die gleichen Konvergenzprobleme auf.

Diese Ergebnisse führen zu der Schlussfolgerung, daß das DSK-Modell nach TAULBEE das in einem quadratischen Kanal bestehende Kräftegleichgewicht zwischen Normal- und Schubspannungen am besten wiedergibt. Das Verhältnis zwischen C_μ und den Koeffizienten C_i vor den nichtlinearen Termen, das dieses Kräfteverhältnis bestimmt, ist offensichtlich realistisch. Dieses ist umso bemerkenswerter, als daß das SSG-Modell die absoluten Werte der Normalspannungen zumindest in 2-dimensionalen Strömungen erheblich besser wiedergibt.

3.4 Kopplung der turbulenten Spannungen

Betrachtet werde zunächst eine einfache ebene Scherströmung. Deren Hauptströmungsrichtung sei x_1 , die Richtung senkrecht dazu sei x_2 . Ferner sei angenommen, daß gegenüber dem wandsenkrechten Geschwindigkeitsgradienten $U_{1,2}$ alle anderen Geschwindigkeitsgradienten vernachlässigbar seien.

Die Kopplung der turbulenten Spannungen ist in der folgenden Abbildung 3.21 skizziert. Die Produktion von Turbulenzenergie erfolgt ausschließlich in der $\overline{u_1^2}$ -Komponente, weil der Produktionsterm der $\overline{u_2^2}$ -Komponente gleich Null ist. Dennoch gilt $\overline{u_2^2} > 0$. Zurückzuführen ist dies auf den Energietransfer von der $\overline{u_1^2}$ zur $\overline{u_2^2}$ -Komponente infolge der Druck-Geschwindigkeitswechselwirkung. Der Produktionsterm der turbulenten Schubspannung ist nun wiederum abhängig von eben dieser $\overline{u_2^2}$ -Komponente. Die turbulente Schubspannung ihrerseits ist verantwortlich für die Produktion von Turbulenzenergie. Es handelt sich also um einen geschlossenen Prozeß, indem die Wechselwirkung der turbulenten Spannungen untereinander und die Druck-Scher-Wechselwirkung elementare Vorgänge sind.

In einer ebenen leicht gekrümmten Scherströmung tritt zusätzlich der Geschwindigkeitsgradient $U_{2,1} \neq 0$ auf, während alle anderen Geschwindigkeitsgradienten weiterhin vernachlässigbar seien. Die Kopplung der turbulenten Spannungen ist in Abbildung 3.22 graphisch dargestellt.

Die turbulenten Normalspannungen sind positiv. Nimmt man ferner an das $U_{1,2}$ und $U_{2,1}$ ebenfalls positiv sind, so haben beide Anteile im Produktionsterm von $\overline{u_1 u_2}$ das gleiche Vorzeichen. Selbst wenn $U_{2,1} \ll U_{1,2}$, wie es an einer schwach gekrümmten Wand der Fall ist, wird der zusätzliche Term einen erheblichen Beitrag leisten, weil gleichzeitig $\overline{u_1^2} \gg \overline{u_2^2}$. Da $\overline{u_1 u_2}$ negativ ist, wird die Produktion von $\overline{u_2^2}$ verstärkt und damit auch die Produktion von $\overline{u_1 u_2}$. Dieses erklärt den experimentellen Befund, daß bereits eine schwache Stromlinienkrümmung einen starken Einfluß auf die Turbulenzstruktur hat.

Wie aber spiegelt sich dies in der Modellierung der turbulenten Spannungen wieder? Die turbulente Schubspannung ergibt sich bei allen Modellen aus

$$\begin{aligned} \overline{u_1 u_2} &= -C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} (U_{1,2} + U_{2,1}) \\ &= -C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} U_{1,2} \left(1 + \frac{U_{2,1}}{U_{1,2}} \right). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Es ist ganz offensichtlich, daß hier die Kopplung nur sehr schwach sein wird, weil der zweite Anteil wegen $U_{2,1} \ll U_{1,2}$ nur zu einer unwesentlichen Erhöhung der Schubspannung führt.

Die starke Wechselwirkung der turbulenten Spannungen, die in dem Produktionsterm P_{ij} steckt, ist also verantwortlich für den Einfluß der Stromlinienkrümmung auf die Turbulenzstruktur. An einer konkaven Wand führt dieses z.B. zu einer Verstärkung der Turbulenz und damit zur Vergrößerung der Wandschubspannung. An einer konvexen Oberfläche sind die Verhältnisse gerade umgekehrt. Analoge Betrachtungen lassen sich im übrigen für die Strömung in divergierenden oder konvergierenden Kanälen anstellen, oder auch hinsichtlich des Einflusses von Kompression und Expansion auf die Turbulenz. Ein weiteres wichtiges Beispiel ist die bereits angesprochene stabilisierende bzw. destabilisierende Wirkung der Rotation auf die Turbulenz. Man spricht in diesem Zusammenhang von *secondary strains*, also Sekundärdeformationen, die dem primären Geschwindigkeitsgradienten $U_{1,2}$ einer einfachen Scherströmung [Bra73] überlagert sind. Diese Sekundärdeformationen haben, auch wenn sie an sich sehr klein sind, erhebliche Auswirkungen auf die Turbulenz.

Im Zuge der Herleitung der expliziten algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle ist der Produktionsterm der turbulenten Spannungen und damit deren starke Kopplung verloren gegangen. Die in diesem Abschnitt beschriebenen Wirkungen von Sekundärdeformationen auf die Turbulenzstruktur werden daher von expliziten algebraischen Reynolds-Spannungsmodellen grundsätzlich schlecht wiedergegeben.

In der Vergangenheit sind verschiedene empirische Modifikationen des Standard k - ϵ -Modells vorgeschlagen worden, die den Einfluß der Stromlinienkrümmung oder anderer Sekundärdeformationen auf die Turbulenz berücksichtigen. Nachteilig an diesen meist empirischen Modifikationen ist ihre stark eingeschränkte Allgemeingültigkeit, so daß sie im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter behandelt werden. In vielen Anwendungen ist diese Vereinfachung schwerwiegender als die Vernachlässigung bzw. ungenügende Modellierung des konvektiven und diffusiven Transportes der turbulenten Spannungen.

3.5 Turbulenzproduktion

Eine weitere wichtige Konsequenz der expliziten Formulierung betrifft den Produktions-term der Turbulenzenergie. Bei allen linearen Modellen findet man für den Quotienten aus Turbulenzproduktion und Dissipation

$$\frac{P_k}{\epsilon} = C_\mu \eta^2 . \quad (3.99)$$

Man kann leicht zeigen, daß in 2-dimensionalen Strömungen die nichtlinearen Terme keinen Beitrag zur Turbulenzproduktion liefern. Auch in 3-dimensionalen Scherströmungen stellt der obige Ausdruck eine gute Näherung dar, weil in Scherströmungen die Turbulenzproduktion durch die Schubspannungsterme dominiert wird. Da die nichtlinearen Terme meist nur einen sehr kleinen Beitrag zur turbulenten Schubspannung liefern, wird auch ihr Beitrag zur Turbulenzproduktion im allgemeinen gering sein.

In der industriellen Anwendung treten sehr häufig Strömungen mit starker Umlenkung auf, wie zum Beispiel bei der Umströmung stumpfer Körper. Das Geschwindigkeitsfeld im Bereich der Umlenkung wird nur unwesentlich durch die lokale Turbulenz beeinflusst. Die lokal erzeugte Turbulenzenergie wird aber konvektiv und diffusiv in benachbarte Strömungsgebiete transportiert und kann dort wiederum einen erheblichen Einfluß auf das Geschwindigkeitsfeld haben. Dieser Sachverhalt bedarf aufgrund seiner praktischen Bedeutung einer eingehenderen Betrachtung.

3.5.1 Strömungen mit starker Umlenkung

Im folgenden wird der Produktionsterm der Turbulenzenergie im Bereich des Staupunktes eines umströmten stumpfen Körpers näher untersucht [Les90, CLS93]. Für eine 2-dimensionale Strömung findet man für den Produktionsterm zunächst allgemein

$$P_k = -\overline{u_1^2} U_{1,1} - \overline{u_2^2} U_{2,2} - \overline{u_1 u_2} (U_{1,2} + U_{2,1}) \quad (3.100)$$

und dann in seiner modellierten Form

$$P_k = 2C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} U_{1,1}^2 + 2C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} U_{2,2}^2 + C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} (U_{1,2} + U_{2,1})^2 . \quad (3.101)$$

Im Staupunkt an einem stumpfen Körper wird der Produktionsterm durch die ersten beide Terme dominiert, also durch $U_{1,1}$ und $U_{2,2}$. Nimmt man ferner an, daß $\overline{u_1^2} \approx \overline{u_2^2}$ gilt, so werden sich wegen $U_{1,1} + U_{2,2} = 0$ die ersten beiden Terme gegenseitig nahezu aufheben und die Turbulenzproduktion ist klein. Da die Geschwindigkeitsgradienten in dem modellierten Produktionsterm zum Quadrat auftreten, addieren sich in diesem Fall die beiden Terme und die Turbulenzproduktion ist groß. Sie wird hier also durch die Geschwindigkeitsgradienten in Normalenrichtung (normal straining) dominiert und es sind die turbulenten Normalspannungen, die die Turbulenzproduktion bestimmen.

Im allgemeinen 3-dimensionalen Fall liefern auch die nichtlinearen Terme einen Beitrag zur Turbulenzproduktion im Staupunkt. Eine einfache analytische Betrachtung ist hier nicht möglich, weshalb die Problematik anhand zweier einfacher Strömungsprobleme untersucht werden soll.

Axialsymmetrische Staupunktströmung

Die Geometrie der von COOPER, JACKSON, LAUNDER und LIAO [C⁺93] experimentell untersuchten axialsymmetrischen Staupunktströmung ist in Abbildung 3.23 dargestellt. Die aus dem Rohr mit dem Durchmesser D ausströmende Luft trifft auf die untere ebene Platte und wird nach allen Seiten umgelenkt. Dabei bildet sich auf der Symmetrieachse ein Staupunkt aus und in radialer Richtung entwickelt sich ein Wandstrahl, dessen exakte Berechnung das Ziel ist. Der Abstand des Rohraustrittsquerschnittes von der Platte beträgt $H = 2D$. Die Reynolds-Zahl, gebildet mit dem Rohrdurchmesser und der mittleren Geschwindigkeit im Rohr, liegt bei 23000. Am Austrittsquerschnitt darf die Strömung als vollständig eingelaufen angesehen werden, so daß klar definierte Randbedingungen vorliegen.

Die berechneten Geschwindigkeits- und Turbulenzenergieverteilungen sind für drei radiale Positionen in den Abbildungen 3.24 bzw. 3.25 dargestellt.

Zur Berechnung der Strömung wurde das kommerzielle FEM-Programm FLOTRAN verwendet, in das alle zu untersuchenden Turbulenzmodelle implementiert wurden. Das numerische Verfahren sowie die Implementierung der Turbulenzmodelle ist im Anhang A beschrieben. Den Berechnungen ging eine sorgfältige Optimierung des Netzes voraus. Eine Verdopplung der Netzfeinheit ergab praktisch identische Ergebnisse. Insbesondere konnte auch durch eine Verfeinerung des Netzes an der Wand keine Verbesserung der Ergebnisse erzielt werden.

Es ist deutlich zu erkennen, daß das Standard k - ϵ -Modell die Turbulenzenergie vor allem in der Nähe des Staupunktes ($r/D=0.5$) drastisch überschätzt. Das berechnete Maximum in der Turbulenzenergie liegt um einen Faktor 10 über den Meßwerten. Alle neuen Turbulenzmodelle überschätzen zwar weiterhin die Turbulenzenergie, sie liegen aber deutlich näher an den experimentellen Werten, dieses gilt insbesondere bei $r/D=1.0$. Interessant ist, daß alle Modelle in der weiteren Entwicklung des Radialstrahls die Turbulenz tendenziell eher unterschätzen. Die Ursache dafür wird deutlich, wenn man die entsprechenden Geschwindigkeitsverteilungen betrachtet (Abb.3.24). Aufgrund der viel zu hohen Turbulenz im Staupunkt ist die Ausbreitung des Radialstrahls in die ruhige Umgebung zu groß, der Strahl wird zu breit. Dadurch wird sowohl die Maximalgeschwindigkeit des Radialstrahls als auch der Geschwindigkeitsgradient senkrecht zur Wand zu klein berechnet und somit zwangsläufig auch die Turbulenzproduktion an der Wand unterschätzt. Aufgrund der deutlich verringerten Turbulenz werden auch die Geschwindigkeitsprofile an allen drei radialen Positionen von den neuen Turbulenzmodellen insgesamt genauer wiedergegeben.

Die sehr niedrigen Meßwerte für die Turbulenzenergie im Bereich des Staupunktes deuten darauf hin, daß die Turbulenz dort fast zum Erlahmen kommt. Erst in der weiteren Entwicklung des Radialstrahls wird die Strömung wieder vollständig turbulent. Solche Effekte können grundsätzlich nicht mit High-Reynolds-Number Turbulenzmodellen erfaßt werden. Daher kann die Überhöhung der Turbulenzenergie im wandnahen Bereich auch auf die Verwendung von Wandfunktionen zurückgeführt werden. Dieses erklärt aber nicht die insgesamt drastische Überschätzung der Turbulenzenergie.

Interessant ist ferner, daß kein wesentlicher Unterschied zwischen den linearen und nicht-linearen Modellen festgestellt werden kann. Die Reduzierung der Turbulenzenergie ist allein auf die Verwendung variabler Koeffizienten zurückzuführen. Hingewiesen sei an dieser Stelle auf die Arbeit von CRAFT ET AL [CLS93], die dieses Strömungsproblem mit einem ungleich komplexeren kubischen algebraischen Low-Reynolds-Number Modell untersuchen. Die Autoren kommen zu dem Schluß, daß nur mit nichtlinearen Modellen diese Staupunktströmung realistisch berechnet werden kann. Es wird in der Arbeit aber nicht nachgewiesen, welche Rolle die nicht linearen Terme tatsächlich spielen oder inwieweit die genauere Berechnung auf die Wahl der (variablen) Koeffizienten zurückzuführen ist.

Im Bereich des Staupunktes ist aufgrund der starken Umlenkung der Strömung P_k/ϵ meist größer als Eins, so daß der konstante Werte $C_\mu=0.09$ des Standard $k-\epsilon$ -Modells viel zu groß ist und die Überhöhung der Turbulenzenergie noch verstärkt. Alle neuen algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle reagieren auf die lokal sehr große Deformation mit einer Verkleinerung des Koeffizienten C_μ , die Turbulenzproduktion wird vermindert. Eine Ausnahme ist hier das GS-Modell (nicht dargestellt), bei dem die Abhängigkeit des Koeffizienten C_μ von η nahezu eliminiert ist.

Auch das RNG-Modell liefert wegen der Abhängigkeit des Koeffizienten $C_{\epsilon,1}$ eine Verbesserung.

$$C_{\epsilon,1} = 1.42 - \frac{\eta(1 - \eta/4.38)}{1 + 0.012\eta^3}$$

Für $\eta > 4.38$ wird der zweite Term kleiner als Null und $C_{\epsilon,1}$ wird insgesamt größer. Damit wird der Produktionsterm in der Dissipationsgleichung größer und die Turbulenzenergie sinkt. Diese Tendenz wird durch das starke Anwachsens des Nenners ($\propto \eta^3$) nach oben begrenzt (Abb.2.1). Der $C_{\epsilon,1}$ -Koeffizient des NKE-Modells zeigt ein etwas anderes Verhalten, er wird mit steigendem η kontinuierlich kleiner, sinkt aber nicht unter 0.43. Gleichzeitig wird aber die Turbulenzproduktion infolge des kleiner werdenden C_μ 's reduziert, so daß auch dieses Modell die Überhöhung der Turbulenzenergie vermindert.

Die Überschätzung der Turbulenzenergie bei sehr starker Umlenkung der Strömung ist also eine grundsätzliche Schwäche aller expliziten algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle, ganz gleich ob linear oder nichtlinear. Die deutliche Verbesserung der Ergebnisse ist auf die Anpassung der Koeffizienten an das lokale Strömungsfeld zurückzuführen.

Welchen Einfluß die lokale Überschätzung der Turbulenzenergie auf benachbarte Strömungsgebiete haben kann, wird im folgenden anhand der Umströmung eines NACA 0012 Tragflügelprofils gezeigt.

Umströmung eines NACA 0012 Tragflügels

Die Umströmung eines NACA 0012 Tragflügelprofils bei 18° Anströmwinkel wurde von VICENTE [Vic97] mit der in dieser Arbeit modifizierten FLOTRAN-Version im Rahmen einer Diplomarbeit untersucht. Im folgenden werden nur die wesentlichen Ergebnisse angegeben.

Die Strömung ist gekennzeichnet durch eine freie Ablösung der Strömung an der Vorderkante des Profils. Diese ist zurückzuführen auf den positiven Druckgradienten, gegen den die Strömung auf der Oberseite anläuft. Infolge der Ablösung an der Vorderkante des Profils bricht der Auftriebsbeiwert schlagartig ein, weil die Ablösung sofort den gesamten Tragflügel erfaßt.

Die numerische Berechnung dieser Strömung ist sehr schwierig. Zum einen weil die Anströmung laminar ist und erst auf dem Tragflügel bei ungefähr 2% Sehnenlänge der Umschlag zur turbulenten Strömung erfolgt. Die Berechnung geht aber von einer vollständig turbulenten Strömung aus, so daß an der Vorderkante die Turbulenzenergie und damit der turbulente Impulstransport massiv überschätzt wird. Nach dem Umschlag entwickelt sich dann die neue Grenzschicht, die infolge des Druckgradienten frühzeitig ablöst.

Auch hier wurde eine sorgfältige Optimierung des numerischen Netzes durchgeführt. Das Finite Elemente Netz umfaßt insgesamt 22624 Elemente, der mittlere Wandabstand des wandnahen Knoten betrug $y^+ \approx 100$. Die Reynolds-Zahl lag bei $Re = 2.4 \times 10^6$. Die Turbulenzintensität der Anströmung wurde auf 1.0×10^{-5} festgesetzt, so daß zumindest die Anströmung praktisch laminar ist.

Das berechnete Strömungsfeld ist für einige Modelle in den Abbildungen 3.26 bis 3.29 in Form von Partikelbahnen dargestellt. Die Auftriebsbeiwerte sind in Tabelle 3.12 gegeben.

Tabelle 3.12: Auftriebsbeiwerte

Modell	Auftriebsbeiwert
SKE	1.59
NKE	1.48
RNG	1.47
GIR-TB	1.38
TB-TB	1.39
SZL	1.33
Experiment	1.17

Den Abbildungen ist zu entnehmen, daß bei dem Standard k - ϵ -Modell keine Ablösung der Strömung auftritt. Dieses resultiert in einem mit $C_L = 1.59$ viel zu hohen Auftriebsbeiwert. Zurückzuführen ist dies auch auf eine Überschätzung der Turbulenz an der Tragflügel Nase, und zwar nicht nur unmittelbar an der Tragflügeloberfläche, sondern bereits in einiger Entfernung vor der Nase. Die Ablösung wird aufgrund des überhöhten Impulstransportes von der Außenströmung zur Tragflügeloberfläche vollständig unterdrückt. Die Darstellungen der Turbulenzenergieverteilung (Abb. 3.30 und 3.31) an der Tragflügel Nase zeigen, daß die neuen Modelle die Turbulenzenergie um mehr als einen Faktor 100 vermindern. Dieses erklärt, warum alle neuen Modelle im Gegensatz zum Standard k - ϵ -Modell eine große Ablöseblase und eine entsprechend genauere Vorhersage der Auftriebsbeiwertes

ergeben.

Ähnliche Beobachtungen teilt MENTER [Men92] mit, der die Umströmung um ein NACA 4412 Tragflügelprofil bei einem Anströmwinkel von 13.87° untersucht. Er vergleicht in seiner Arbeit das Standard k - ϵ - mit verschiedenen Versionen des k - ω -Modells. Alle Modelle lieferten an der Tragflügelnahe extrem überhöhte Werte der Turbulenzenergie und infolge dessen eine sehr ungenaue Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes. Erheblich bessere Ergebnisse erzielte MENTER [Men92] durch Ersetzen der Invarianten η des Deformationstensors im Produktionsterm der Turbulenzenergie

$$P_k = C_\mu \eta^2 \quad (3.102)$$

durch die Invariante des Rotationstensors

$$P_k = C_\mu \xi^2 . \quad (3.103)$$

Im Gegensatz zum Deformationstensor enthält der Rotationstensor lediglich Scherdeformationen, so daß die Normaldeformationen keinen Beitrag mehr zur Turbulenzproduktion liefern. Letztere sind aber gerade im Bereich der Tragflügelnahe aufgrund der starken Umlenkung der Strömung sehr groß. Auf diese Weise gelingt es MENTER [Men92], die Turbulenzproduktion auf ein realistisches Maß zu reduzieren.

Diese Modifikation des Produktionsterms hat also den gleichen Effekt wie die Verwendung eines variablen C_μ bzw. $C_{\epsilon,1}$. Die vorangegangenen Abschnitte haben bereits gezeigt, daß die Abhängigkeit des C_μ und des $C_{\epsilon,1}$ theoretisch und physikalisch begründet ist, die Modifikation des Produktionsterms ist hingegen ein Kunstgriff und nicht allgemeingültig.

Diese Befunde stehen in Übereinstimmung mit den Untersuchungen von ABID ET AL [ARG95] am gleichen Tragflügelprofil. Die Autoren zeigen, daß das k - ω -Modell nur in Verbindung mit einem variablen C_μ realistische Ergebnisse liefert. Das Standard k - ω -Modell unterdrückt die Ablösung fast vollständig, während das k - ω -Modell mit variablem C_μ die Größe der Rezirkulationszone in recht guter Übereinstimmung mit Experimenten wiedergibt.

Anzumerken ist noch, daß bei den in dieser Arbeit gefundenen Ergebnissen die Ablösung erst ungefähr in der Mitte des Tragflügels einsetzt und damit auch hier zu spät. Dieses ist zum einen mit der schon angesprochenen Überschätzung der Turbulenz an der Vorderkante infolge der laminaren Anströmung zu erklären. Der Umschlag von der laminaren zur turbulenten Strömung wird natürlich auch von den neuen Modellen nicht korrekt wiedergegeben, stattdessen wird das gesamte Strömungsfeld als turbulent angenommen. Dieser Umschlag kann nur mit speziellen Low-Reynolds-Number Modellen berechnet werden, falls überhaupt. Zum anderen erfordert auch die Berechnung einer freien Ablösung die Verwendung eines Low-Reynolds-Number Modells, weil Wandfunktionen im Bereich der Ablösung nicht mehr gültig sind. Die verbleibenden Abweichungen zwischen Experiment und Rechnung sind also mit der ungenauen Beschreibung des wandnahen Bereichs zu erklären. Die neuen Modelle korrigieren lediglich die überhöhte Turbulenzproduktion des Standard k - ϵ -Modells vor dem Tragflügel.

3.5.2 Rezirkulationszonen

Ein rezirkulierende Strömung ist durch eine besonders ausgeprägte Stromlinienkrümmung charakterisiert. Für die folgenden Betrachtungen ist es hilfreich den Produktionsterm der Turbulenzenergie in Stromlinienkoordinaten zu formulieren. Vernachlässigt man $U_{s,s}$, $U_{n,n}$ und U_n/R gegenüber $U_{s,n}$ und U_s/R , so findet man für den gesuchten Produktionsterm

$$P_k \approx -\overline{u_n u_s} \left(U_{s,n} - \frac{U_s}{R} \right), \quad (3.104)$$

wobei n die Koordinatenrichtung normal zu den Stromlinien und s die Stromlinienrichtung bezeichnet. Die Schubspannung $\overline{u_n u_s}$ ist dabei dem Gradienten $U_{s,n}$ entgegen gerichtet.

Im Kern einer Rezirkulationszone gilt

$$U_{s,n} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{U_s}{R} > 0. \quad (3.105)$$

Je nach Stärke der Rezirkulation und Krümmungsradius wird der Gesamtterm entweder negativ oder positiv sein, so daß der Produktionsterm insgesamt auch negativ werden kann. In den meisten Fällen führt die Stromlinienkrümmung zu einer Verringerung der Turbulenzenergie.

Alle in dieser Arbeit untersuchten linearen Turbulenzmodelle liefern für den Produktionsterm

$$P_k \approx C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \left(U_{s,n} - \frac{U_s}{R} \right)^2. \quad (3.106)$$

Je nach Vorzeichen und Größe der beiden Anteile wird die Turbulenzproduktion größer oder kleiner sein, niemals aber negativ. Im innersten Kern einer Rezirkulationszone kann es in der Tat zu einer negativen Produktion von Turbulenzenergie kommen, die von den expliziten algebraischen Reynolds-Spannungsmodellen grundsätzlich nicht wiedergegeben wird.

Rezirkulierende Raumströmung

Ein interessantes Experiment zur näheren Untersuchung dieser Aspekte wurde von BOYLE und GOLAY [BG83] durchgeführt. Es sei bereits vorab angemerkt, daß es sich hierbei um ein Negativbeispiel handelt. Es dient gewissermaßen zur Warnung.

Die Geometrie des Strömungsproblems ist in Abbildung 3.32 dargestellt. Die Rezirkulation wird von einem Strahl angetrieben, der in der Mitte des Raums mit $U_{\text{Ref}}=0.823$ m/s eintritt. Als Strömungsmedium wurde Wasser verwendet.

Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes ist vergleichsweise einfach, weil letzteres durch die Geometrie des Kanals und nur in zweiter Linie durch die Turbulenz dominiert wird. Problematisch ist jedoch die Vorhersage der Turbulenzenergieverteilung. Vorteilhaft an diesem Beispiel ist der Umstand, daß die Wand keinen wesentlichen Einfluß auf die Turbulenz hat, es sind also tatsächlich nur die Vorgänge innerhalb der rezirkulierenden

Strömung, die hier untersucht werden müssen.

Zur Berechnung der Strömung wurde das kommerzielle FEM-Programm FLOTRAN verwendet, in das alle zu untersuchenden Turbulenzmodelle implementiert wurden. Das numerische Verfahren sowie die Implementierung der Turbulenzmodelle ist im Anhang A beschrieben. Im folgenden werden lediglich einige ausgewählte Ergebnisse diskutiert, die zur Veranschaulichung der Sachverhalte genügen. Numerisch stellt dieses Strömungsproblem keine besonderen Anforderungen, selbst mit einem sehr groben Netz lassen sich akzeptable Ergebnisse erzeugen, so daß diese Problematik hier nicht weiter diskutiert werden muß.

Die Ausbildung der Rezirkulationszone ist sehr gut in den Vektordarstellungen des mit dem Standard k - ϵ -Modell und dem GIR-SSG-Modell berechneten Geschwindigkeitsfeldes zu erkennen (Abb. 3.33). Wie auch die Darstellung (Abb. 3.34) der Geschwindigkeitsverteilung auf den horizontalen Linien A bis D zeigen, liefern beide Modelle (und alle anderen) nahezu identische Geschwindigkeitsverteilungen. Lediglich im oberen Bereich (D) sind größere Abweichungen von den Meßwerten zu festzustellen.

Als enttäuschend schlecht muß man die berechnete Turbulenzenergieverteilung bezeichnen, die in Abbildung 3.35 gegeben ist. Die in dieser Arbeit gefundenen Ergebnisse stehen in Übereinstimmung mit von BOYLE und GOLAY selbst durchgeführten k - ϵ -Rechnungen und mit denen, die von LESCHZINER in [Les93] wiedergegeben werden.

Die Messungen sind gekennzeichnet durch ein ausgeprägtes lokales Maximum der Turbulenzenergie auf der linken Seite, das von den Rechnungen vollständig verpaßt wird. Aufgrund des großen Geschwindigkeitsgradienten ist dort zum einen die Turbulenzproduktion groß. Dies ist aber nicht entscheidend. Der Geschwindigkeitsgradient ist dort viel zu klein, um eine derartig hohe Turbulenz zu bewirken. BOYLE und GOLAY [BG83] erklären das ausgeprägte Maximum der Turbulenzenergie auf der linken Seite vielmehr mit dem starken konvektiven Transport der Turbulenzenergie entlang der Stromlinien, der von den expliziten algebraischen Reynolds-Spannungsmodellen nur sehr ungenau modelliert wird.

Das Standard k - ϵ -Modell liefert eine drastische Überschätzung der Turbulenzenergie im Kern der Rezirkulationszone. In diesem Bereich führt die Krümmung der Stromlinien auf die im vorherigen Abschnitt erläuterte Weise zu einer Abschwächung der Turbulenz, die vom Standard k - ϵ -Modell nicht wiedergegeben wird.

Rezirkulierende Strömungen weisen aber noch eine zweite wichtige Eigenschaft auf. Im Kern der Rezirkulationszone herrscht in der Regel kein Gleichgewicht zwischen Produktion und Dissipation von Turbulenzenergie, tatsächlich gilt $P_k/\epsilon > 1$. Alle neuen algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle reagieren auf dieses Ungleichgewicht in der Turbulenzenergiebilanz mit einer Verkleinerung des Koeffizienten C_μ . Vor allem im unteren Bereich (A, B) wird die Turbulenzenergie dadurch auf ein realistisches Niveau reduziert, ohne daß allerdings die Verteilung über den Querschnitt richtig wiedergegeben wird.

Die horizontale Verteilung des Koeffizienten C_μ und des Quotienten P_k/ϵ ist in Abbildung 3.36 dargestellt. Man erkennt deutlich, daß im Kern der Rezirkulationszone C_μ wesentlich

kleiner als der konstante Werte 0.09 ist und somit verantwortlich für die gegenüber dem Standard k - ϵ -Modell verminderte Turbulenzenergie ist.

Dieses Beispiel macht ganz deutlich, daß die Eliminierung des Produktionsterms der turbulenten Spannungen und die Vernachlässigung des konvektiven Transportes in den Transportgleichungen der Reynoldsschen Spannungen zu einem, in diesem Fall, Versagen des Turbulenzmodells führt. Weder der Einfluß die Stromlinienkrümmung, noch die in diesem Fall negative Produktion von Turbulenzenergie im Innersten der Rezirkulationszone, noch die konvektiven Transportprozesse werden realistisch modelliert.

3.6 Diskussion der Modelle

Es wurde gezeigt, daß die physikalische Bedeutung der Abhängigkeit der Modellkoeffizienten vom lokalen Strömungsfeld in der Anpassung des Modells an lokale Ungleichgewichtszustände in der Turbulenzenergiebilanz liegt.

Die lokale Abhängigkeit vom Strömungsfeld wird durch dimensionslose Invariante des Deformations- und Rotationstensors ausgedrückt. Alle Modelle weisen die durch Experimente bestätigte reziproke Abhängigkeit der Koeffizienten C_μ vom Quotienten P_k/ϵ auf, wobei allerdings signifikante quantitative Unterschiede zwischen den Modellen festzustellen sind. Die SSG-Versionen des GIR- und TB-Modells ergeben für große P_k/ϵ recht kleine C_μ . Mit den Konstanten aus der LRR- bzw. GLIP-Druck-Scher-Korrelation stellen sich insbesondere für kleine P_k/ϵ ausgesprochen große C_μ ein, diese sind vor allem im Gleichgewichtsfall $P_k/\epsilon \approx 1$ unrealistisch hoch. Die TB-Version des GIR- und TB-Modells, sowie das NKE- und SZL-Modell geben die experimentellen Daten gut wieder und liefern die insgesamt realistischsten C_μ -Werte. Dieses gilt insbesondere auch für $P_k/\epsilon > 1$.

Das Standard k - ϵ -Modell liefert selbst für den einfachen Fall der homogenen Scherströmung ein zu starkes Anwachsen der Turbulenzenergie. Der Quotient P_k/ϵ liegt je nach Modell bei ≈ 2 , so daß der konstante Werte $C_\mu=0.09$ des Standard k - ϵ -Modells, der nur für $P_k/\epsilon \approx 1$ realistisch ist, Ursache der überhöhten Turbulenzproduktion ist. Alle neuen Modelle ergeben eine wesentlich bessere Übereinstimmung mit den LES-Daten, was sich auch in den deutlich kleineren C_μ äußert. Die TB- und SSG-Versionen aller Modelle liefern zusammen mit dem SZL-Modell die insgesamt besten Ergebnisse.

Ferner unterscheiden die Modelle zwischen rotatorischen und translatorischen Deformationen. In einfachen Scherströmungen sind die Invarianten des Deformations- und Rotationstensors identisch, i.a. ist dies jedoch nicht der Fall. Dieser Sachverhalt wurde am einfachen Beispiel einer rotierenden homogenen Scherströmung näher untersucht. Die Rotation taucht lediglich im Rotationstensor auf, so daß dessen Invariante für die Modellierung des Einflusses der Rotation auf die Turbulenz verantwortlich ist. Auf diese Weise sind die Modelle in der Lage, zumindest qualitativ den stabilisierenden bzw. destabilisierenden Einfluß der Rotation auf die Turbulenz wiederzugeben. Es ist festzustellen, daß die SSG-Versionen des GIR- und TB-Modells die homogene Scherströmung mit und ohne Rotation am besten wiedergeben. Bei allen anderen Modellen setzt die Stabilisierung zu früh ein, dieses gilt insbesondere für das SZL-Modell. Dieser Defekt kann aber durch eine Modifikation der Konstanten des SZL-Modells leicht behoben werden. Beim RNG-

Modell wird der gesamte Einfluß des lokalen Strömungsfeldes über den Koeffizienten $C_{\epsilon,1}$ der Dissipationsgleichung berücksichtigt. Da die Invariante des Rotationstensors bei der Modellierung des Koeffizienten $C_{\epsilon,1}$ vernachlässigt wurde, kann dieses Modell nicht zwischen rotatorischen und translatorischen Deformationen des Geschwindigkeitsfeldes unterscheiden. Der Einfluß der Rotation auf die Turbulenz wird wie beim Standard k - ϵ -Modell nicht wiedergegeben.

Es wurde ferner gezeigt, daß explizite algebraische Reynolds-Spannungsmodelle aufgrund ihrer Struktur in Staupunkten oder ganz allgemein in Gebieten großer Deformation zu einer Überschätzung der Turbulenzenergieproduktion neigen. Diese Strömungsgebiete sind durch $P_k/\epsilon > 1$ gekennzeichnet. Die neuen Modelle reagieren darauf mit einer Verkleinerung des Koeffizienten C_μ bzw. mit einer Vergrößerung des Koeffizienten $C_{\epsilon,1}$, so daß die Turbulenzproduktion signifikant reduziert wird. Für die axialsymmetrische Staupunktströmung und die Umströmung eines Tragflügels lieferten das SZL-Modell und die TB-Versionen des GIR- und TB-Modell die beste Übereinstimmung mit den Messungen. Der strukturelle Defekt der Modelle wird allerdings nicht behoben.

Festzuhalten ist, daß die nichtlinearen Modelle eine genauere Modellierung der turbulenten Normalspannungen liefern. Dieses wurde anhand der ebenen Kanalströmung und der Strömung in einem quadratischen Kanal eingehend untersucht. Dabei stellte sich heraus, daß insbesondere die auf dem TB-DSK-Modell basierenden algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle die Sekundärströmungen im quadratischen Kanal realistisch wiedergeben. Die absoluten Werte der Normalspannungen werden hingegen von den SSG-Versionen am besten modelliert. Die turbulenten Schubspannungen werden durch die nichtlinearen Terme nur wenig beeinflusst.

Ein allen *expliziten* algebraischen Reynolds-Spannungsmodellen anhaftender Defekt ist die praktisch fehlende Sensitivität gegenüber sogenannten *secondary strains*. Zurückzuführen ist dies auf die Eliminierung des Produktionsterms der turbulenten Spannungen, der für die Kopplung der Spannungen verantwortlich ist. Dieser Term ist in *impliziten* algebraischen Reynolds-Spannungsmodellen [Rod76] noch enthalten, ist dort aber Ursache massiver numerischer Schwierigkeiten. Die expliziten Modelle sind daher grundsätzlich nicht in der Lage, die starken Wechselwirkungen zwischen komplexen Deformationfeldern und den Spannungen einerseits und die Interaktion der individuellen Spannungen untereinander realistisch wiederzugeben.

Insgesamt hat sich das GS-Modell [GS92] als relativ unvorteilhaft herausgestellt. Die asymptotischen Eigenschaften der homogenen Scherströmungen werden zwar gut wiedergegeben. Das Modell liefert aber für große P_k/ϵ unrealistisch kleine C_μ und entsprechend ist auch die turbulente Schubspannung in der ebenen Kanalströmung zu niedrig. Insgesamt ist die Abhängigkeit des Koeffizienten C_μ von der Invarianten η des Deformationstensors zu schwach ausgeprägt. Diese Beobachtungen erklären auch, warum bei den Anwendungen dieses Modell [Gat96] keine wesentlichen Verbesserungen gegenüber dem Standard k - ϵ -Modell festgestellt werden konnten. Weiterhin ist festzustellen, daß die Anisotropie der turbulenten Normalspannungen sowohl in der ebenen Kanalströmung als auch im quadratischen Kanal erheblich unterschätzt wird. Zurückzuführen sind diese Defekte auf die Linearisierung und die damit verbundene Anpassung des Modells an die homogene

Scherströmung, was aufgrund der Existenz der vollständig expliziten Lösung von GIRIMAJI [Gir95, Gir96] sowieso überflüssig geworden ist. Aus diesen Gründen wird das GS-Modell bei den folgenden Anwendungen nicht mehr berücksichtigt.

Die bisherigen Untersuchungen deuten darauf hin, daß das SZL-Modell und die TB-Versionen des GIR- und TB-Modells die insgesamt plausibelsten Ergebnisse liefern. Dieses gilt insbesondere für die Abhängigkeit des Koeffizienten C_μ vom lokalen Strömungsfeld und die daraus resultierende realistischere Wiedergabe des Turbulenzfeldes. Berücksichtigt man noch die recht gute Reproduktion der Sekundärströmungswirbel im quadratischen Kanal, so erwiesen sich das GIR-TB- und TB-TB-Modell bislang allen anderen als überlegen.

Mit Ausnahme des GS-Modells werden alle Modelle im folgenden auf eine Reihe sehr komplexer turbulenter Strömungen angewendet. Dabei wird sich zeigen, inwieweit die Anpassung an das lokale Ungleichgewicht in der Turbulenzenergiebilanz und die genauere Modellierung der turbulenten Normalspannungen zu einer exakteren Berechnung des Strömungsfeldes führt.

4 Verifikation der Turbulenzmodelle

Im Unterschied zu den bisher behandelten Strömungsproblemen, in denen jeweils isolierte Strömungseffekte betrachtet wurden, werden die Turbulenzmodelle nun anhand zweier komplexer Strömungen sehr viel eingehender untersucht.

Es handelt sich dabei um die ablösenden Strömungen an einer zurückspringende Stufe und an einem ebenen dimensional Hugel. In beiden Fällen stehen zuverlässige und vollständige experimentelle Daten zur Verfügung. Außerdem sind diese Strömungen bereits vielfach numerisch untersucht worden, so daß auch ein Vergleich mit anderen Arbeiten möglich ist.

Alle Berechnungen werden mit dem kommerziellen FEM-Programm FLOTRAN durchgeführt, in das die Turbulenzmodelle implementiert worden sind. Das numerische Verfahren und die Implementierung der Turbulenzmodelle ist im Anhang A beschrieben.

4.1 Strömung über eine zurückspringende Stufe

4.1.1 Beschreibung des Strömungsproblems

Ausgewählt wurden für diese Arbeit die experimentellen Untersuchungen von DRIVER und SEEGMILLER [DS85]. Diese zeichnen sich durch die Verwendung eines relativ genauen Meßverfahrens (LDA) und durch die Vollständigkeit der experimentellen Daten aus. Interessant ist aber vor allem der Umstand, daß die Arbeit von DRIVER und SEEGMILLER auch eine Variation der Geometrie (Abb.4.37) umfaßt. Die der Stufe gegenüberliegende Wand wurde in verschiedenen Winkeln α angestellt, so daß aufgrund der Divergenz des Strömungskanals die Strömung zusätzlich gegen einen positiven Druckgradient anläuft. Ausführliche experimentelle Daten stellen DRIVER und SEEGMILLER für $\alpha=0^\circ$ und $\alpha=6^\circ$ zur Verfügung.

Als Strömungsmedium verwendeten die Autoren Luft. Das Verhältnis von Stufenhöhe H zur Höhe des Einlaßkanals betrug 1:8, die Weite des Windkanals 12 Stufenhöhen. Die 2-Dimensionalität der Strömung wurde nachgewiesen. Die auf die Stufenhöhe und die maximale Geschwindigkeit im Einlauf ($U_{\text{Ref}}=44.2$ m/s) bezogene Reynolds-Zahl betrug $Re = 36000$.

Die Strömung ist charakterisiert durch eine Ablösung der Strömung an der Stufe, wobei der Ablösepunkt aufgrund der Geometrie fest definiert ist. Entlang der zunächst nur schwach gekrümmten Trennstromlinie entsteht eine freie Scherschicht, unterhalb derer sich ein hochturbulentes Rezirkulationsgebiet ausbildet. Infolge des positiven Druckgradienten wird die freie Scherschicht zur Wand gezogen und die Strömung legt in einem bestimmten Abstand von der Stufe an der unteren Wand an. In der Ecke bildet sich ferner ein kleiner Sekundärwirbel aus, der sich entgegengesetzt zur Hauptrezirkulation dreht.

Randbedingungen

Das Rechengebiet erstreckte sich 4 Stufenhöhen stromaufwärts und 30 stromabwärts der Stufe. Die Randbedingungen für U und k am Kanaleintritt wurden den experimentellen

Daten entnommen. Die Dissipation wurde aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\epsilon = \frac{C^{3/4} k^{3/2}}{L} \quad \text{mit} \quad L = \min(0.41y, 0.085\delta) \quad (4.107)$$

bestimmt, wobei y der Wandabstand und δ die gemessene Grenzschichtdicke ist [SZL93].

4.1.2 Literaturübersicht

Als Maß für die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung wird in der Literatur meist die Größe des Rückströmgebietes verwendet. Die in der folgenden Tabelle 4.13 angegebenen Meßwerte basieren auf der Wandschubspannungsverteilung. An dieser Stelle sei aber bereits angemerkt, daß die ebenfalls gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen auf ein früheres Wiederanlegen der Strömung hindeuten.

Die Abweichung des Standard k - ϵ -Modells von den Messungen beträgt je nach Testfall und Autor zwischen -12% und -37%, die Diskrepanz zwischen den einzelnen Arbeiten ist also erheblich. Übereinstimmend berichten YAKHOT ET AL [Y⁺92] und LIEN und LESCHZINER [LL94], daß die RNG-Version des k - ϵ -Modells eine deutliche Vergrößerung der Rezirkulationszone bewirkt. Eine weitere Verbesserung erhalten die Autoren, wenn sie das nichtlineare Modell von SPEZIALE (SP) [RB90, Spe87] oder RUBINSTEIN und BARTOK (RB) [RB90] mit dem RNG-Modell kombinieren. LIEN und LESCHZINER [LL94] zeigen weiterhin, daß diese nichtlinearen Terme in Kombination mit dem Standard k - ϵ -Modell nur wenig Einfluß auf die Strömung haben. Dieses steht in einem gewissen Widerspruch zu THANGAM und SPEZIALE [TS92], die in diesem Fall eine Verlängerung der Rezirkulationszone um immerhin 15% angeben. Tatsächlich liegt beiden Arbeiten nicht das identische Modell zugrunde. Das SP-Modell enthält in seiner Originalform noch konvektive Terme, die von LIEN und LESCHZINER [LL94] vernachlässigt wurden.

Alle Autoren berichten übereinstimmend, daß die nichtlinearen Terme und/oder die Verwendung der RNG-Version zu einer Vergrößerung des kleinen Eckwirbels führt.

Sowohl das NKE- als auch das SZL-Modell liefern für das Experiment von DRIVER und SEEGMILLER [DS85] ebenfalls eine bessere Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung als das Standard k - ϵ -Modell, für das KIM ET AL-Experiment [KKJ80] wird die Wiederanlegelänge eher zu groß berechnet.

Ein direkter Vergleich mit diesen Literaturstellen ist für das SKE-, NKE-, SZL- und RNG-Modell möglich. An entsprechender Stelle wird darauf verwiesen. Die Kombination des RNG-Modells mit dem SP- bzw. RB-Modell führte zu erheblichen Konvergenzschwierigkeiten, so daß hier auf einen Vergleich verzichtet werden muß. Zurückzuführen sind diese Konvergenzprobleme auf die entlang der Trennstromlinie sehr großen Geschwindigkeitsgradienten und der daraus folgenden massiven Überschätzung der turbulenten Normalspannungen. Die dadurch sehr großen Quellterme führen zur Divergenz der iterativen Lösung.

Tabelle 4.13: Tabelle berechneter und gemessener Wiederanlegelängen.

Autor	Quelle	Modell	x_R/H
KIM ET AL	[KKJ80]	Messung	7.1 ± 0.5
THANGAM, SPEZIALE	[TS92]	SKE	6.00
		SKE+SP	6.90
YAKHOT ET AL	[Y+92]	RNG	6.60
		RNG+SP	6.90
SHIH ET AL	[S+94]	SKE	6.35
		NKE	7.50
	[SZL93]	SZL	7.35
DRIVER, SEEGMILLER	[DS85]	Messung $\alpha = 0^\circ$	6.27
SHIH ET AL	[S+94]	SKE	4.99
		NKE	6.02
	[SZL93]	SZL	5.82
COORDES	[Cor92]	SKE	4.55
DRIVER, SEEGMILLER	[DS85]	Messung $\alpha = 6^\circ$	8.22
LIEN, LESCHZINER	[LL94]	SKE	≈ 6.00
		RNG	≈ 7.80
		RNG+SP	≈ 7.90
		RNG+RB	≈ 7.90

4.1.3 Fehlerbetrachtung

Die oben beschriebene große Diskrepanz zwischen mit dem gleichen Turbulenzmodell erzielten Ergebnissen verdeutlicht den erheblichen Einfluß des numerischen Verfahrens auf die Lösung. Neben dem Modellierungsfehler, der in dieser Arbeit eigentlich untersucht werden soll, wird das Ergebnis zusätzlich durch Diskretisierungs- und Konvergenzfehler verfälscht.

Als Konvergenzfehler bezeichnet man die Differenz zwischen der exakten Lösung des nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems und seiner iterativen Lösung. Die sicherste Methode den Konvergenzfehler zu minimieren besteht darin, die Anzahl der globalen Iterationen hinreichend groß zu wählen. Die erforderliche Anzahl Iterationen hängt vom jeweiligen Turbulenzmodell ab, so daß dieses für jedes Modell gesondert untersucht werden mußte. Dabei zeigt sich, daß sich die Lösung mit dem Standard k - ϵ -Modell nach 1200 Iterationen nicht mehr wesentlich ändert. Das RNG- und NKE-Modell benötigten in etwa 200 zusätzliche Iterationen, was insbesondere auf die Verwendung von variablen Koeffizienten in der Dissipationsgleichung zurückzuführen war. Die linearen Versionen des TB-

GIR- und SZL-Modells ergaben nach etwa 1300 Iterationen eine konvergierte Lösung, während die entsprechenden nichtlinearen Modelle erst nach 1500 Iterationen vollständig konvergiert waren. Dieses wurde jeweils dadurch überprüft, daß die resultierenden Ergebnisse mit denen nach jeweils weiteren 500 Iterationen verglichen wurden. Die relative Änderung der Lösung (Geschwindigkeit, Turbulenzenergie) lag in allen Fällen unter 1%.

Der Diskretisierungsfehler ist auf eine unzureichende numerische Auflösung des Strömungsfeldes zurückzuführen, also auf eine zu geringe Netzdichte. Mit zunehmender Netzfeinheit nimmt der Diskretisierungsfehler ab und die vollständig konvergierte Lösung strebt gegen die exakte Lösung des Gleichungssystems, die natürlich noch den Modellierungsfehler enthält.

Das in dieser Arbeit verwendete numerische Verfahren ist formal von erster Ordnung. Dabei ist zu beachten, daß die Ordnung des Verfahrens lediglich angibt, wie schnell der Diskretisierungsfehler mit zunehmender Verfeinerung des Netzes abnimmt. Sie läßt aber keine Schlußfolgerungen hinsichtlich der absoluten Größe des Fehlers zu. Eine Beurteilung des Diskretisierungsfehlers erfordert also eine genaue Untersuchung des Einflusses der Netzfeinheit auf die Lösung. Bei hinreichender Netzfeinheit, also netzunabhängiger Lösung, spielt die Ordnung des numerischen Verfahrens keine Rolle mehr.

Eine erste Orientierung zur Festlegung der Netzfeinheit lieferte dabei die Arbeit von THANGAM und SPEZIALE [TS92], in der diese Problematik sehr ausführlich diskutiert wird. Ferner sei in diesem Zusammenhang auf die Rechnungen von SHIH ET AL [SZL93, S⁺94] und LIEN ET AL [LL94] verwiesen, die einen direkten Vergleich mit der vorliegenden Arbeit ermöglichen.

Erschwert wird die Festlegung einer hinreichenden Netzfeinheit durch die Verwendung von Wandfunktionen zur Überbrückung des wandnahen Bereichs. Streng genommen ist die Anwendung von Wandfunktionen nur für dimensionslose Wandabstände $y^+ > 30$ zulässig. Im Bereich der Stufenecke und in der Umgebung des Wiederanlegepunktes wird die Forderung jedoch nicht erfüllt. Unmittelbar am Wiederanlegepunkt ist die Wandschubspannung und damit der dimensionslose Wandabstand sogar gleich Null. Eine beliebige Verfeinerung des Netzes an der Wand ist also eher ambivalent.

Ausführlicher diskutiert werden im folgenden zwei unterschiedliche Netzfeinheiten, die stromabwärts der Stufe aus jeweils 180×80 bzw. 270×120 Elementen bestanden. Aufgrund des großen Einflusses des Abstandes des wandnahen Knotens von der Wand, werden für beide Netze die Ergebnisse für zwei unterschiedliche Wandabstände angegeben (siehe Tabelle 4.14).

Da die Netzabhängigkeit der Lösung u.U. auch vom Turbulenzmodell abhängt, werden im folgenden sowohl die Ergebnisse für das SKE- als auch für das NKE-Modell exemplarisch diskutiert.

Die Geschwindigkeitsverteilung und die Verteilung der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannungen ist an drei axialen Positionen in den Abbildung 4.39 und 4.40 dargestellt. Weiterhin ist die C_f -Verteilung in den Abbildungen 4.41 und 4.42 gegeben. Die

Tabelle 4.14: Netze zur Darstellung der Netzabhängigkeit der Lösung.

Netz	Netzfeinheit	Wandabstand y/H
1	180×80	0.0138
2	180×80	0.0098
3	270×120	0.0138
4	270×120	0.0098

ebenfalls dargestellten Meßwerte dienen zur Orientierung.

Es ist offensichtlich, daß die Geschwindigkeitsprofile an allen drei axialen Positionen praktisch unabhängig von der Netzfeinheit und vom Wandabstand sind. Dieses gilt für beide Turbulenzmodelle. In den Verteilungen der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannung sind kleine Abweichungen zwischen den groben Netzen (Netz 1 und 2) und den feinen Netzen (Netz 3 und 4) zu erkennen. Der Abstand des wandnahen Knotens macht sich auch hier offensichtlich nicht bemerkbar. Zu erklären ist dieser unterschiedliche Befund damit, daß die turbulenten Kenngrößen von den lokalen Geschwindigkeitsgradienten abhängen. Kleine Änderungen im Geschwindigkeitsfeld können daher einen relativ großen Einfluß auf die Turbulenz haben.

Eine weitgehende Abschätzung des Diskretisierungsfehlers ist mittels Richardson-Extrapolation möglich, wobei eine systematische Netzverfeinerung vorausgesetzt wird. Demnach ergibt sich der prozentuale Fehler auf dem Netz mit der Netzweite h aus

$$\epsilon_h = \frac{\Phi_h - \Phi_H}{\Phi_h (F^p - 1)}, \quad (4.108)$$

wobei Φ_h das Ergebnis auf dem groben Netz h , Φ_H das Ergebnis auf dem feineren Netz H , F der Faktor der systematischen Verfeinerung und p die Ordnung des gesamten numerischen Verfahrens ist. Der Verfeinerungsfaktor ist hier gleich 1.5 und das numerische Verfahren ist erster Ordnung. Die daraus resultierenden maximalen Diskretisierungsfehler sind in Tabelle 4.15 zusammengefaßt.

Tabelle 4.15: Maximale Diskretisierungsfehler

Turbulenzmodell	Max. Fehler in U	Max. Fehler in k	Maximaler Fehler in $\overline{u_1 u_2}$
SKE	$\ll 1\%$	4.9%	5.1%
NKE	$\ll 1\%$	2.4%	2.5%

Der maximale Diskretisierungsfehler in der Turbulenzenergie und in der turbulenten Schubspannung liegt bei 5%, wobei der Fehler im gesamten übrigen Strömungsfeld erheblich

niedriger ist. Wichtig ist in diesem Zusammenhang auch, daß dort, wo die beiden Turbulenzmodelle sich wesentlich unterscheiden ($x/H=2$), der Diskretisierungsfehler erheblich kleiner als der Unterschied zwischen den Modellen ist.

Sehr viel größere Unterschiede treten in der axialen Verteilung der Wandschubspannungskoeffizienten an der unteren Wand auf. Die Netzfeinheit hat auf die C_f -Verteilung keinen wesentlichen Einfluß, diese hängt praktisch nur vom Abstand des wandnahen Knotens von der Wand ab.

Interessant ist in diesem Zusammenhang, daß die mit dem größeren Wandabstand (Netz 1 und 3) berechneten C_f -Verteilungen sehr gut mit denen von SHIH ET AL [SZL93, S⁺94], übereinstimmen. Dabei wird das lokale Minimum in der Wandschubspannung offensichtlich deutlich unterschätzt. Bei geringerem Wandabstand werden hingegen die experimentellen Werte sehr gut getroffen. Kritisch anzumerken ist jedoch, daß bei diesem Wandabstand die y^+ -Werte über weite Bereiche innerhalb der Rezirkulationszone kleiner als 30 sind. Eine weitere Verringerung des Wandabstandes des wandnahen Knotens führt zu einem noch ausgeprägteren Minimum, der Fehler wird also wieder größer. In der Beurteilung der Wandschubspannung liegt also eine gewisse Ambivalenz. Der Einfluß des Wandabstandes beschränkt sich aber offensichtlich auf den wandnahen Bereich, weil in den Geschwindigkeitsprofilen praktisch kein Unterschied zu erkennen ist.

4.1.4 Darstellung der Ergebnisse

Die Ergebnisse sind im ANHANG D.1 zusammengefaßt. Im einzelnen sind Höhenliniendarstellungen der Stromfunktion, C_f - und C_p -Verteilungen an der stufenseitigen Wand, sowie Profile der axialen Geschwindigkeitskomponente, der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannung an drei Positionen hinter der Stufe gegeben.

Größe der Rezirkulationszone

Die Größe der berechneten Rezirkulationszone spiegelt die Summe aller Einfüsse auf das Strömungsfeld wieder und dient daher als integrales Maß für die Genauigkeit der Berechnung. Die berechnete Größe des kleinen Eckwirbels und der Rezirkulationszone sind Tabelle 4.16 oder den Höhenliniendarstellungen der Stromfunktion in Abbildung 4.43 und 4.44 zu entnehmen.

Die in dieser Arbeit gefundenen Ergebnisse stimmen sehr gut mit denen von SHIH ET AL [S⁺94] bzw. von LIEN und LESCHZINER [LL94] überein (vergl. Tab.4.13).

Das NKE- und RNG-Modell liefern ein erheblich vergrößertes Rückströmgebiet. Gemeinsam ist beiden Modellen außerdem, daß der Sekundärwirbel in der Stufenecke ebenfalls größer wird, ohne daß er allerdings auch nur annähernd die aus den Messungen der Wandschubspannungsverteilung abgeleitete Größe erreicht. Zurückzuführen ist die Vergrößerung des Eckwirbels auf die Abhängigkeit des Koeffizienten $C_{\epsilon,1}$ vom lokalen Deformationfeld. In der Ecke sind sowohl η als auch ξ sehr klein, was zu einer Vergrößerung des Koeffizienten $C_{\epsilon,1}$ und damit des Produktionsterms der ϵ -Gleichung führt. Diese resultiert in einer Verringerung der Schubspannung und erleichtert so die Ausbildung eines Sekundärwirbels.

Tabelle 4.16: Axiale Erstreckung der Rezirkulationszone x_R und des kleinen Eckwirbels x_S . Lineare Modellvarianten.

Modell	x_R/H	x_S/H	x_R/H	x_S/H
	$\alpha = 0^\circ$		$\alpha = 6^\circ$	
SKE	5.06	0.08	5.98	0.07
NKE	6.05	0.22	7.55	0.19
RNG	6.42	0.35	7.85	0.32
SZL	5.96	0.02	7.62	0.02
GIR-SSG	6.54	0.10	9.25	0.11
GIR-TB	6.05	0.02	7.80	0.03
TB-SSG	6.59	0.14	keine Konvergenz	
TB-TB	6.05	0.09	7.59	0.08
GIR-LRR	5.06	0.01	6.01	0.05
GIR-GLIP	5.15	0.03	6.21	0.06
TB-LRR	5.14	0.06	6.15	0.09
TB-GLIP	5.28	0.05	6.32	0.11
Messung	≈ 6.27	≈ 1	≈ 8.22	≈ 1.10

Die neuen algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle GIR und TB bringen in der jeweiligen LRR- und GLIP-Version nur eine minimale Verbesserung gegenüber dem Standard k - ϵ -Modell. Wie bereits anhand der ebenen Kanalströmung gezeigt wurde, ergeben diese Modellversionen relativ hohe C_μ -Werte und tendieren damit zu einer Überschätzung der turbulenten Schubspannung. Infolgedessen ist die resultierende Rezirkulationszone zu klein. Da auch alle weiteren Untersuchungen diesen Befund bestätigten, kann auf eine weitere Diskussion und Darstellung der Ergebnisse verzichtet werden.

Dieses steht im Gegensatz zu den SSG- und TB-Versionen, die eine deutliche Verlängerung der Rezirkulationszone bewirken. Bereits im 0° -Fall ergibt die SSG-Version eine zu große Rezirkulationszone, dieses gilt in noch stärkerem Maß für den 6° -Fall. Die TB-SSG-Modellkombination erwies sich in diesem Fall sogar als numerisch instabil. Dieses ist mit den doch sehr kleinen C_μ -Werten (siehe Kapitel 3.2) zu erklären, die diese Modellvarianten im Bereich großer P_k/ϵ bzw. großer η und ξ liefern. In diesen Gebieten wird dadurch der turbulente Impulstransport erheblich reduziert, d.h. die lokale Wirbelviskosität wird kleiner und damit der Diffusionsterm. Numerisch bedeutet dies, daß die Diagonaldominanz der Koeffizientenmatrix verschlechtert wird und damit die Konvergenzeigenschaften insgesamt. Ähnliche Erfahrungen teilen ABID ET AL [ARG95] für das GS-SSG-Modell mit. Die TB-Versionen hingegen konvergierten schnell und ergaben in beiden Fällen sehr realistische Ergebnisse. Gleiches gilt im übrigen auch für das lineare SZL-Modell.

Angemerkt sei an dieser Stelle, daß die SSG-Versionen zusammen mit einem recht kleinen Koeffizienten $C_{\epsilon,2}=1.83$ im Destruktionsterm der Dissipationsgleichung verwendet werden. Die Wahl der Koeffizienten resultiert aus einer Anpassung des dem algebraischen Modells zugrundeliegenden vollständigen Reynolds-Spannungsmodells an homogene Strömungen. Verwendet man den eher üblichen Wert $C_{\epsilon,2}=1.90$, so sind die resultierenden Ergebnisse der jeweiligen SSG-Variante praktisch identisch mit der TB-Version der Modelle.

Geschwindigkeitsverteilungen

Die Geschwindigkeitsverteilungen sind jeweils für 3 Positionen in den Abbildungen 4.45 und 4.46 und für das SZL-Modell in den Abbildungen 4.64 und 4.65 gegeben.

Die experimentell ermittelten Geschwindigkeitsverteilungen stehen hinsichtlich der tatsächlichen Erstreckung des Rückstromgebietes in einem gewissen Widerspruch zu den Wandschubspannungsverteilungen. Die Geschwindigkeitsverteilungen weisen im 0°-Fall bei $x/H=6$, und im 6°-Fall bereits bei $x/H=7$ keine negativen Geschwindigkeiten mehr auf. Demnach müßte die tatsächliche Rezirkulationszone kleiner sein. Zwei Erklärungen für diese Diskrepanz sind möglich. Zum einen wurde die Wiederanlegelänge aus der gemessenen Wandschubspannungsverteilung durch lineare Interpolation zweier relativ weit auseinander liegender Meßpunkte gewonnen. Möglicherweise ist die lineare Interpolation hier nicht zulässig. Zum anderen zeigt CORDES [Cor92], daß die Rezirkulationszone im Bereich des Wiederanlegepunktes nur noch als sehr dünne Rezirkulationsschicht vorliegt. Der erste Meßpunkt des Geschwindigkeitsfeldes könnte bereits außerhalb dieser Schicht gelegen haben.

Bei den hier durchgeführten Rechnungen wird der wandnahe Bereich durch Wandfunktionen überbrückt, so daß in den Rechnungen Wandschubspannungsverteilung und Geschwindigkeitsfeld immer übereinstimmen. Der wandnahe Bereich wird aber auf diese Weise gar nicht berechnet, dieses würde die Anwendung eines Low-Reynolds-Number-Modells erfordern, wie es bei CORDES [Cor92] der Fall ist.

Hinsichtlich der Interpretation der Ergebnisse kann man folgern, daß die numerischen Berechnungen tatsächlich eher kleinere Wiederanlegelängen ergeben sollten, als es die Wandschubspannungsmessungen implizieren. Das NKE-, SZL- und die TB-Version des GIR- und TB-Modells liefern vor diesem Hintergrund sehr realistische Ergebnisse.

Deutlich wird außerdem, daß bei $x/H=8$ erhebliche Unterschiede zwischen Rechnung und Messung auftreten, die Geschwindigkeit ist in Wandnähe zu niedrig. Dieses spiegelt eine bekannte Schwäche fast aller Turbulenzmodelle wieder. Die Entwicklung der neuen Grenzschicht hinter dem Wiederanlegepunkt erfolgt zu langsam. Zurückzuführen ist dies auf einen zu geringen Impulstrom von der Kernströmung in Richtung Wand, dieses ist insbesondere im 6°-Fall sehr auffällig.

Wandschubspannungs- und Wanddruckverteilungen

Von besonderem praktischen Interesse sind die Wanddruckverteilung und die Wandschub-

spannungsverteilung, die den Abbildungen 4.47 bis 4.50 bzw. 4.61 und 4.63 zu entnehmen sind. Auch hier ist im übrigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den in der Literatur [S⁺94, LL94] angegebenen Verteilungen festzustellen.

Die Wandschubspannungsverteilung, dargestellt als $C_f = \tau_w / (\rho U_{\text{Ref}}^2 / 2)$, bestätigt die bereits diskutierten Befunde zum Geschwindigkeitsfeld. Das Standard k - ϵ -Modell weicht zum Teil sehr deutlich von den Messungen ab, vor allem der Anstieg der Schubspannung nach dem Wiederanlegen der Strömung erfolgt zu früh, was in Übereinstimmung der zu klein berechneten Rezirkulationszone steht.

Alle anderen Modelle führen insbesondere im Bereich des Rückströmgebietes zur einer besseren Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Im 6°-Fall ist dieses sogar für das gesamte Strömungsfeld zu erkennen. Die deutlich beste Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ergab sich für die TB-Versionen des GIR- und TB-Modells und für das NKE-Modell. Insbesondere wird der Anstieg der Schubspannung hinter dem Wiederanlegepunkt recht gut wiedergegeben. Das RNG-Modell, vor allem aber die SSG-Versionen des GIR- und TB-Modells weisen entsprechend der großen Rezirkulationszone einen viel zu späten Anstieg der Wandschubspannung auf, so daß auch für große x/H die Meßwerte nicht erreicht werden.

Bemerkenswert sind die doch sehr großen C_f -Werte im Bereich des Rückströmgebietes. Diese sind ein Indiz für die sehr hohe Turbulenz in diesem Gebiet. Außerdem deutet dies auf sehr große Geschwindigkeitsgradienten in Wandnähe hin, was wiederum die schon angesprochene Sensitivität der Wandschubspannung vom Wandabstand des wandnahen Knotens erklärt.

Zu ganz ähnlichen Befunden kommt man bei der Betrachtung der Wanddruckverteilung, die als $C_p = (P - P_{\text{Ref}}) / (\rho U_{\text{Ref}}^2 / 2)$ gegeben ist, wobei als Referenzdruck P_{Ref} der Druck bei $x/H = -4$ verwendet wird. Während im 6°-Fall die neuen Modelle eine ausgesprochen gute Übereinstimmung mit den Messungen zeigen, treten im 0°-Fall für große x/H noch deutliche Unterschiede auf. Alle neuen Modelle ergeben im Bereich des Rückströmgebietes eine bessere Übereinstimmung mit den Messungen. Mit wachsender Entfernung von der Stufe sind im 0°-Fall die C_p -Werte jedoch zu hoch. Hier ist auch eine gewisse Diskrepanz zu der in [S⁺94] für das NKE-Modell angegebenen C_p -Verteilung festzustellen. Dort stellt sich für das gesamte Strömungsfeld eine Verbesserung ein, was hier nicht bestätigt werden kann.

Turbulente Schubspannung und Turbulenzenergie

Es wäre nun zu erwarten, daß die oben festgestellten Änderungen im Geschwindigkeitsfeld ihre Parallele in den Verteilungen der turbulenten Schubspannung und der Turbulenzenergie finden. Die Ergebnisse sind den Abbildungen 4.51 bis 4.54, sowie 4.64 und 4.65 zu entnehmen.

Insbesondere in der Nähe der Stufe ($x/H = 2$) liefern die neuen Modelle eine erheblich kleinere turbulente Schubspannung und ein viel zu niedrige Turbulenzenergie. Dieses gilt vor allem für die freie Scherschicht, während im unteren Bereich für $y/H \leq 0.5$

die Meßwerte zumindest für den 0°-Fall tendenziell besser wiedergegeben werden. Das Standard k - ϵ -Modell liefert dort sehr große turbulente Schubspannungen, die für das frühe Wiederanlegen der Strömung verantwortlich sind. Gleiches gilt im übrigen auch für $x/H=5$. Diese Beobachtungen erklären zunächst einmal die festgestellte Vergrößerung der Rezirkulationszone.

Keines der Modelle ist aber in der Lage, die gemessene Verteilung der turbulenten Schubspannung und der Turbulenzenergie richtig wiederzugeben. Tatsächlich treten erhebliche Diskrepanzen zwischen Rechnung und Messung auf. So wird der scharfe Knick in der Schubspannungsverteilung bei $x/H=2$ von keinem der Modelle auch nur annähernd richtig vorhergesagt.

In den Verteilungen der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannung bei $x/H=5$ spiegelt sich die schon bei den Wandschubspannungsverteilungen angesprochene sehr hohe Turbulenz im Rückströmgebiet wieder. Die Maxima der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannung liegen bei allen Modellen viel zu weit entfernt von der Wand, was wiederum die Abweichungen im Geschwindigkeitsprofil bei $x/H=8$ erklärt.

LIEN und LESCHZINER [LL94] zeigen, daß realistische Schubspannungs- und Turbulenzenergieverteilungen nur mit Reynolds-Spannungsmodellen berechnet werden können, die die starke Interaktion der turbulenten Spannungen und die Sensitivität der Spannungen gegenüber der Stromlinienkrümmung berücksichtigen. Zu einer besseren Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes führt dies allerdings nicht.

Einfluß der nichtlinearen Terme

Es ist bereits gezeigt worden, daß die Differenz der turbulenten Normalspannungen direkt in die Impulsbilanz eingeht und damit das Strömungsfeld beeinflusst. Diese Differenz der turbulenten Normalspannungen wird vom Standard k - ϵ -Modell und allen anderen nichtlinearen Modellen nur sehr ungenau, oftmals auch grob falsch wiedergegeben. Die in dieser Arbeit behandelten nichtlinearen Modellvarianten haben die Eigenschaft, daß sie zumindest in einfachen Kanalströmungen die turbulenten Normalspannungen sehr viel realistischer modellieren.

Ein direkter Vergleich der linearen und nichtlinearen Modellversion wird für das SZL-Modell durchgeführt, weil nur für dieses Modell ein Vergleich mit der Literatur möglich ist. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 4.61 bis 4.67 zusammengefaßt.

Die Übereinstimmung mit den von SHIH, ZHU und LUMLEY [SZL93] angegebenen Ergebnissen ist sehr gut, wobei in dieser Arbeit eine etwas größere Rezirkulationszone berechnet wurde. Der Einfluß der nichtlinearen Terme auf das Geschwindigkeitsfeld ist klein, die Rezirkulationszone wird nur unwesentlich größer. Die nichtlinearen Terme bewirken eine Umverteilung der turbulenten Spannungen, $\overline{u_1^2}$ wird größer und $\overline{u_2^2}$ um den entsprechenden Betrag kleiner. Daher liefert das nichtlineare Modell richtigerweise $\overline{u_1^2} > \overline{u_2^2}$. Damit ist eine strukturelle Schwäche des linearen Modells behoben. Die genauere Betrachtung der turbulenten Normalspannungen zeigt aber auch, daß diese bei allen axialen Positionen nur sehr ungenau berechnet werden, vor allem bei $x/H=5$ sind die Spannungen viel zu

klein und das Maximum liegt viel zu weit entfernt von der Wand. Die nichtlinearen Terme haben nur einen sehr geringen Einfluß auf die turbulenten Schubspannungen.

Die übrigen Ergebnisse sind in den Abbildungen 4.68 bis 4.77 gegeben. Die Größe des Sekundärwirbels und die Wiederanlegelänge sind Tabelle 4.17 zu entnehmen.

Tabelle 4.17: Axiale Erstreckung der Rezirkulationszone x_R und des kleinen Eckwirbels x_S (nichtlineare Modellvarianten).

Modell	x_R/H	x_S/H	x_R/H	x_S/H
	$\alpha = 0^\circ$		$\alpha = 6^\circ$	
SZL	6.02	0.02	7.66	0.02
GIR-SSG	6.79	0.32	9.33	0.25
GIR-TB	5.96	0.12	7.59	0.14
TB-SSG	6.98	0.26	keine Konvergenz	
TB-TB	6.01	0.14	7.61	0.11
Messung	≈ 6.27	≈ 1	≈ 8.22	≈ 1.10

Auch hier liefern die SSG-Versionen des GIR- und TB-Modells eine viel zu große Rezirkulationszone bzw. eine nicht konvergierte Lösung. Interessant ist, daß die nichtlinearen Terme eine deutliche Vergrößerung des Rückströmgebietes und des Sekundärwirbels bewirken. Dieser Befund steht in Übereinstimmung mit einigen anderen Arbeiten [TS92, Y⁺92].

Die jeweiligen TB-Versionen zeigen hingegen keinen wesentlichen Einfluß der nichtlinearen Terme, obwohl auch sie die turbulenten Normalspannungen besser wiedergeben als die entsprechenden linearen Modelle. Tatsächlich wird die Rezirkulationszone sogar etwas kleiner.

Die in [TS92, Y⁺92] und [LL94] vorgestellten nichtlinearen Modelle basieren alle auf dem RNG-Modell, das wie die SSG-Modellvarianten in dieser Arbeit eine sehr starke Reduzierung der Turbulenz hinter der Stufe bewirkt. Bereits die linearen Modellvarianten tendieren zu einer Überschätzung des Rückströmgebietes. Zudem verwenden die genannten Arbeiten nichtlineare Modelle mit konstanten Koeffizienten, die in Gebieten großer Deformation die Anisotropie der turbulenten Normalspannungen überschätzen [LL94].

Diese Befunde lassen die Schlußfolgerung zu, daß die nichtlinearen Terme, d.h. die Anisotropie der turbulenten Normalspannungen, sich nur dann wirklich bemerkbar macht, wenn die turbulenten Schubspannungen hinreichend klein sind. Bei den in dieser Arbeit untersuchten nichtlinearen Modellen (SSG-Versionen) führte dieses jedoch immer zu einer insgesamt sehr viel ungenaueren Berechnung. Die Größe des Rückströmgebietes wird drastisch überschätzt.

Unabhängig von dem tatsächlichen Einfluß der nichtlinearen Terme auf das Strömungsfeld muß festgestellt werden, daß die nichtlinearen Modelle die turbulenten Normalspannungen zwar qualitativ genauer wiedergeben, die Diskrepanz zu den Meßwerten aber nachwievor sehr groß ist.

4.1.5 Diskussion der Ergebnisse

Diese Ergebnisse zeigen eindeutig, daß die neuen Modelle das Geschwindigkeitsfeld in erheblich besserer Übereinstimmung mit den Meßergebnissen berechnen. Zurückzuführen ist diese Verbesserung ausschließlich auf die Verwendung eines vom lokalen Strömungsfeld abhängigen Koeffizienten C_μ bzw. $C_{\epsilon,1}$ beim RNG- und NKE-Modell.

Daher sollen im folgenden noch kurz die sich einstellenden C_μ -Verteilungen und die dazu korrespondierende Verteilung des Quotienten P_k/ϵ betrachtet werden. Beides ist für einige Modelle in Abbildung 4.78 für $x/H=2$ dargestellt.

Wie erwartet erreicht die Turbulenzproduktion in der freien Scherschicht aufgrund des großen Geschwindigkeitsgradienten ihr Maximum und fällt dann kontinuierlich zur Wand hin auf Null ab. Die Turbulenzenergiebilanz befindet sich fast im gesamten Strömungsgebiet nicht im Gleichgewicht. Die in der freien Scherschicht sehr große Deformation führt bei den neuen Modellen zu einer Verkleinerung des Koeffizienten C_μ und damit zu einer verminderten Turbulenzproduktion. Dieser Effekt war in den Verteilungen der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannung klar zu erkennen.

Interessant ist, daß für $y/H < 0.5$ der Koeffizient C_μ größer als der konstante Wert $C_\mu = 0.09$ des Standard $k-\epsilon$ -Modells ist. Dieses würde zu einer Vergrößerung der Turbulenzproduktion und der turbulenten Schubspannung führen. Die mit den neuen Modellen berechneten Verteilungen der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannung weisen in diesem Bereich aber sehr viel kleinere Werte als das Standard $k-\epsilon$ -Modell auf. Die entscheidende Veränderung findet also offensichtlich im Bereich der freien Scherschicht statt. Dort wird aufgrund des kleineren C_μ die turbulente Schubspannung reduziert, die vertikalen Geschwindigkeitsgradienten werden in der freien Scherschicht größer, während letztere in Wandnähe kleiner werden. Dieses ist auch gut an den Geschwindigkeitsprofilen zu erkennen. Aufgrund des kleineren Geschwindigkeitsgradienten in Wandnähe sind dort auch die Turbulenzenergie und die turbulente Schubspannung niedriger.

Sehr gute Ergebnisse lieferten das NKE- und SZL-Modell, sowie die TB-Versionen des GIR- und TB-Modells und mit Einschränkung auch das RNG-Modell. Diese Modelle wurden abschließend zur Berechnung der Stufenströmung bei $\alpha = 8^\circ$ und $\alpha = 10^\circ$ verwendet. Für diese Rechnungen wurde zum einen das Rechengebiet von 30 H auf 40 H verlängert und zum anderen das Netz im Bereich der Rezirkulationszone weiter verfeinert. Die berechneten Wiederanlegenlängen sind zusammen mit den entsprechenden Meßwerten in Abbildung 4.79 dargestellt.

Es ist festzustellen, daß mit zunehmenden Winkel α , also mit wachsendem positiven Druckgradienten, die Abweichungen zwischen Rechnung und Messung größer werden. Doch auch für große Winkel α liefern die neuen Modelle eine bessere Übereinstimmung

mit den Messungen als das Standard k - ϵ -Modell.

Die nichtlinearen Modelle liefern eine insgesamt genauere Berechnung der turbulenten Normalspannungen. Sowohl das SZL-, das GIR- als auch das TB-Modell geben die Anisotropie der Normalspannungen in besserer Übereinstimmung mit den experimentellen Daten wieder, wobei die Anisotropie tendenziell zu klein ist. In Übereinstimmung mit der Literatur kann festgestellt werden, daß dies zu einer Vergrößerung des Sekundärwirbels führt, sofern gleichzeitig die turbulenten Schubspannungen stark reduziert werden. Unglücklicherweise wird dieser Sachverhalt in [TS92, Y⁺92] nicht eingehend untersucht, weil das nachgerechnete Experiment von KIM ET AL [KKJ80] experimentelle Daten der turbulenten Spannungen erst hinter dem Wiederanlegepunkt bei $x_R/H \approx 7.1$ zur Verfügung stellt. LIEN und LESCHZINER [LL94] zeigen hingegen anhand der von DRIVER und SEEGMILLER [DS85] ausgemessenen Stufenströmung, daß diese Modelle mit konstanten Koeffizienten vor allem im Bereich der Rezirkulationszone die Anisotropie der turbulenten Normalspannungen deutlich zu groß berechnen. Dieses erklärt dann auch, warum diese Modelle offensichtlich einen wesentlich größeren Sekundärwirbel ergeben als die in der vorliegenden Arbeit untersuchten nichtlinearen Modelle mit vom lokalen Strömungsfeld abhängigen Koeffizienten.

LIEN ET AL [LL94] zeigen weiterhin, daß differentielle Reynolds-Spannungsmodelle die Größe des kleinen Eckwirbels (≈ 1 H) recht genau wiedergeben. Insgesamt werden zwar von diesen Modellen auch die turbulenten Spannungen genauer wiedergegeben. Das Geschwindigkeitsfeld wird dadurch aber nur unwesentlich besser berechnet. Aus ingenieurtechnischer Sicht bringen die differentiellen Modelle hier keine wesentlichen Vorteile gegenüber den expliziten algebraischen Reynolds-Spannungsmodellen.

4.2 Strömung über einen 2-dimensionalen Hügel

4.2.1 Beschreibung des Strömungsproblems

Eine systematische experimentelle Untersuchung der Strömung über 2-dimensionale Hügel wurde von ALMEIDA, DURAO und HEITOR [ADH93] durchgeführt. Auch diese Arbeit zeichnet sich durch die Vollständigkeit und Qualität der experimentellen Daten aus.

Die Geometrie des Kanals ist in Abbildung 4.80 dargestellt. Die Länge des Kanals betrug 7 m, die Höhe 0.17 m und die Weite 0.2 m. Als Strömungsmedium wurde Wasser verwendet. Die maximale Anströmgeschwindigkeit betrug $U_{\text{Ref}}=2.147$ m/s. Bezogen auf die Höhe des Hügels $H=0.028$ m ergibt dies eine Reynolds-Zahl von $Re = 6 \times 10^4$. Aufgrund der Länge des Kanals war die Strömung am Fuße des Hügels nahezu eingelaufen.

Die Strömung ist charakterisiert durch eine starke Ablenkung der Strömung vom Fuße des Hügels nach oben. An der Hügelkuppe treten infolgedessen Übergeschwindigkeiten um $1.27 U_{\text{Ref}}$ auf. Hinter dem Hügel strömt das Fluid gegen einen positiven Druckgradienten an, was zu einer massiven Ablösung der Strömung bei ungefähr $x/H=0.43$ führt. Es bildet sich eine Rezirkulationszone sehr hoher Turbulenzintensität aus, die sich bis $x_R/H=4.82$ erstreckt. Die der Strömung aufgrund der Kanalgeometrie aufgeprägte Stromlinienkrümmung hat am Fuße des Hügels sowohl auf der Anström- als auch auf der Abströmseite einen

destabilisierenden, also anfachenden Einfluß auf die Turbulenz. Anders verhält es sich auf der Hügelkuppe, dort stabilisiert die aufgeprägte Stromlinienkrümmung die Turbulenz.

4.2.2 Literaturübersicht

Dieses Strömungsproblem war Gegenstand eines ERCOFTAC-Workshops [ERC95], so daß zahlreiche Vergleiche zur Verfügung stehen. Neben dem Standard k - ϵ -Modell wurden Low-Reynolds-Number-Modelle und differentielle Reynolds-Spannungsmodelle verwendet.

Eine wesentliche und leider sehr störende Schlussfolgerung dieses Workshops ist, daß die vorgestellten Ergebnisse offensichtlich sehr vom numerischen Verfahren und sicher auch von der numerischen Auflösung des Strömungsfeldes beeinflusst waren. Nur so sind die großen Unterschiede in den mit dem gleichen Turbulenzmodell berechneten Ergebnissen zu erklären.

Die Erstreckung des Rückströmgebietes, noch mehr aber die lokalen Maxima der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannung unterscheiden sich bei gleichem Turbulenzmodell teilweise um einen Faktor 2. Vor allem in der Rezirkulationszone hinter dem Hügel weichen die Rechnungen sehr stark von den experimentellen Daten ab, zum Teil um einen weiteren Faktor 2. Festzuhalten ist ferner, daß Low-Reynolds-Number-Modelle und/oder differentielle Reynolds-Spannungsmodelle zwar eine Verbesserung gegenüber dem Standard k - ϵ -Modell darstellen, jedoch kein einheitlicher Trend festgestellt werden kann und auch die Diskrepanz zu den Meßwerten weiterhin erheblich ist.

Ein detaillierter Vergleich dieser Modelle würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen und es wird daher darauf verzichtet. Es werden lediglich einige Ergebnisse angeführt, die unmittelbar mit denen dieser Arbeit verglichen werden können (Tabelle 4.18).

Tabelle 4.18: Axiale Erstreckung der Rezirkulationszone x_R hinter dem Hügel. Die Bezeichnung bezieht sich auf die Nomenklatur in [ERC95].

Autor	Bezeichnung	Modell	x_R/H
LIEN, LESCHZINER	UMISTLes	SKE	≈ 4.0
	UMISTLes	RNG	≈ 5.0
HANJALIC ET AL	UDelftHa	SKE	≈ 3.1
CASTRO, PALMA	UPorto	SKE	≈ 3.5
DAVIDSON ET AL	UChalmer	SKE	≈ 3.0
ALMEIDA ET AL		Messung	≈ 4.82

Folgt man den Ergebnissen von LIEN und LESCHZINER, so liefert auch in diesem Fall das Standard k - ϵ -Modell eine um etwa 20% zu kleine Rezirkulationszone. Alle übrigen Arbeiten deuten auf eine noch stärkere Abweichung um bis zu -60% hin. Das RNG-Modell

führt ähnlich wie bei der Stufenströmung ebenfalls zu einer besseren Übereinstimmung mit den Messungen.

4.2.3 Beschreibung der numerischen Berechnung

Auch den Berechnungen der Hügelströmung ging eine sorgfältige Optimierung des numerischen Netzes voraus. Aufgrund der freien Ablösung auf der Rückseite des Hügels ist insbesondere der Wandabstand des wandnahen Knotens sehr kritisch. Die Strömung läuft gegen einen positiven Druckgradienten an, der letztlich für die Ablösung verantwortlich ist. Je näher der erste Knoten an der Wand liegt, desto kleiner ist dort die Geschwindigkeit und damit die Trägheitskraft, die gegen die Druck- und Reibungskraft ankommen muß. Je näher der erste Knoten an der Wand liegt, desto früher löst die Strömung ab und umso größer wird die Rezirkulationszone sein. Die numerischen Unsicherheiten sind bei diesem Anwendungsfall noch größer als bei der Strömung über eine zurückspringende Stufe, dort lag zumindest der Ablösepunkt fest.

Das Rechengebiet erstreckt sich 18 H stromab- und 10 H stromaufwärts der Hügelkuppe, wobei H die Höhe des Hügels ist. Das gesamte Strömungsfeld wurde mit 19600 Elementen (Abb.4.81) diskretisiert, von denen 165×70 stromabwärts der Hügelkuppe lagen. Der wandnahe Knoten lag im Anströmbereich und weit hinter dem Hügel bei $y^+ \approx 40$ und auf der Hügelkuppe bei $y^+ \approx 30$ ($=0.01$ H). Eine Verfeinerung des Netzes in beide Koordinatenrichtungen um einen Faktor 1.5 bei gleichem Wandabstand des wandnahen Knotens führte nur zu geringfügigen Änderungen in der Lösung. Der mittels Richardson-Extrapolation berechnete maximale Fehler lag in der Geschwindigkeit unter 1% und in der Turbulenzenergie bzw. der turbulenten Schubspannung unter 4.6%. Die Unterschiede zwischen den Turbulenzmodellen sind auch hier sehr viel größer als der Diskretisierungsfehler. Die Konvergenz wurde wiederum durch einen Vergleich mit der Lösung nach weiteren 500 Iterationen sichergestellt. Die dabei festgestellten Änderungen in der Lösung lagen unter 1%. (Anmerkung: Die Fehlerabschätzung wurde nur an den bei der Ergebnisdiskussion besprochenen Profilen der Geschwindigkeit und der Turbulenz durchgeführt und nicht im gesamten Strömungsfeld).

Die Randbedingungen für U , k und ϵ am Eintritt wurden aus der gesonderten Berechnung einer ebenen Kanalströmung entnommen. Dies ist genauer, als die Verwendung der experimentellen Daten, die erst unmittelbar vor dem Hügel zur Verfügung standen. Ein Vergleich der numerisch ermittelten Anströmung mit den experimentellen Daten am Fuße des Hügels zeigte eine sehr gute Übereinstimmung.

Ein direkter Literaturvergleich der erzielten Ergebnisse ist für das Standard k - ϵ -Modell und das RNG-Modell möglich. Es sei daher vorweggenommen, daß die Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit für das SKE-Modell ein Wiederanlegen der Strömung bei $x/H \approx 3.25$ und für das RNG-Modell bei $x/H \approx 5.2$ ergaben. Ersteres steht in guter Übereinstimmung mit der Mehrheit der in Tabelle 4.18 aufgelisteten Ergebnisse, während LIEN und LESCHZINER ein deutlich größeres Rückströmgebiet für das SKE-Modell erhalten. Erstauñlicherweise liegen die in der vorliegenden Arbeit mit dem RNG-Modell berechneten Ergebnisse sehr nah bei denen von LIEN und LESCHZINER. Eine genauere Betrachtung der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannung zeigte, daß die in dieser Arbeit

gefundenen Verteilungen recht gut, gemessen an den ansonsten fest gestellten großen Unterschieden sogar sehr gut mit denen von LIEN und LESCHZINER bzw. HANJALIC ET AL übereinstimmen. Die Ursache für die doch signifikant größere Wiederanlegelänge bleibt unklar.

4.2.4 Darstellung der Ergebnisse

Die Ergebnisse sind auch hier wieder im Anhang D.2 zusammengefaßt, die berechneten Ablösepunkte und die Erstreckung des Rückströmgebietes können außerdem den Tabellen 4.19 und 4.20 entnommen werden.

Größe der Rezirkulationszone

Tabelle 4.19: Ablösepunkt x_S/H und Erstreckung des Rückströmgebietes x_R/H bei der Hügelströmung.

Modell	x_S/H	x_R/H
SKE	≈ 0.54	≈ 3.25
NKE	≈ 0.50	≈ 4.23
RNG	≈ 0.44	≈ 5.25
Experiment	0.43	4.82

Tabelle 4.20: Ablösepunkt x_S/H und Erstreckung des Rückströmgebietes x_R/H bei der Hügelströmung.

Modell	Lineares Modell		Nichtlineares Modell	
	x_S/H	x_R/H	x_S/H	x_R/H
GIR-SSG	≈ 0.50	≈ 4.94	≈ 0.50	≈ 4.63
GIR-TB	≈ 0.52	≈ 4.53	≈ 0.50	≈ 4.63
TB-SSG	≈ 0.46	≈ 4.84	≈ 0.46	≈ 4.84
TB-TB	≈ 0.48	≈ 4.73	≈ 0.48	≈ 4.84
SZL	≈ 0.50	≈ 4.73	≈ 0.50	≈ 4.73
Experiment	0.43	4.82		

Die Größe der Rezirkulationszone kann aus der Wandschubspannungsverteilung und aus den Höhenliniendarstellungen der Stromfunktion (Abb. 4.82, 4.83 und 4.84) abgelesen werden. Es ist offensichtlich, daß das Standard k - ϵ -Modell eine zu späte Ablösung und ein zu frühes Wiederanlegen der Strömung berechnet. Alle anderen Modelle liefern eine erheblich bessere Übereinstimmung mit den Meßwerten. Die Ablösung tritt früher auf

und das Rückströmgebiet weist ungefähr die richtige Größe auf.

Ein Einfluß der nichtlinearen Terme ist praktisch nur für das GIR-Modell festzustellen, wobei der Trend nicht einheitlich ist. In der SSG-Version bewirken die nichtlinearen Terme ein früheres Anlegen der Strömung, in der TB-Version eine leichte Vergrößerung des Rückströmgebietes.

Geschwindigkeitsverteilungen

Die Geschwindigkeitsverteilungen an den vier dargestellten Positionen (Abb. 4.85 und 4.86) bestätigt diese Befunde. Während das SKE-Modell bei $x/H=0$ und im Rückströmgebiet deutlich von den Messungen abweicht, ergeben alle anderen eine recht gute Übereinstimmung. Ferner ist auch hier wieder festzustellen, daß die Entwicklung der neuen Grenzschicht hinter dem Wiederanlegepunkt zu langsam erfolgt. Das Standard k - ϵ -Modell weist bei $x/H=6.61$ eine bessere Übereinstimmung mit den Messungen auf, dieses ist aber auf den vorzeitigen Beginn der Grenzschichtentwicklung zurückzuführen.

Turbulenzenergie und turbulente Schubspannung

Könnte für das Geschwindigkeitsfeld noch eine überraschend gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten festgestellt werden, so ist der Vergleich der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannung (Abb. 4.87 bis 4.90) ernüchternd. An allen axialen Positionen, mit Ausnahme $x/H = 0$, werden sowohl die Turbulenzenergie als auch die turbulente Schubspannung erheblich zu klein berechnet, bei $x/H=4.28$ sogar um einen Faktor 3.

Interessant ist, daß die neuen Modelle bei $x/H=0$ eine deutlich realistischere Turbulenzenergie und Schubspannung liefern. Das SKE-Modell ergibt hier eine viel zu hohe Turbulenzenergie. Die starke Ablenkung der Strömung vor dem Hügel führt, wie bereits früher gezeigt, zu einer überhöhten Turbulenzproduktion, die von den neuen Modellen infolge des variablen C_μ bzw. $C_{\epsilon,1}$ reduziert wird. Diese hohe Turbulenz im Bereich der Hügelkuppe beeinflusst in starkem Maße die Lage des Ablösepunktes und damit auch die Größe des gesamten Rückströmgebietes.

Die Höhenliniendarstellung der Turbulenzenergie (Abb. 4.91 bis 4.93) zeigt weiterhin, daß die neuen Modelle im gesamten Strömungsgebiet eine niedrigere Turbulenzenergie ergeben. Signifikant ist dies vor allem auf der stromabwärts gelegenen Seite des Hügels. Der Vergleich mit den Meßwerten zeigt allerdings, daß dieser Trend in die falsche Richtung führt. Bereits das k - ϵ -Modell liefert außer bei $x/H = 0$ eine zu kleine Turbulenzenergie.

Die genauere Berechnung des Ablösepunktes und der Erstreckung des Rückströmgebietes ist also auf die Reduzierung des turbulenten Impulstransportes im Bereich der Hügelkuppe und auf der Rückseite des Hügels zurückzuführen.

Turbulente Normalspannungen

Ähnlich wie bei der zurückspringenden Stufe liefern auch hier die linearen Modelle $\overline{u_2^2} > \overline{u_1^2}$,

wohingegen die nichtlinearen Modelle richtigerweise $\overline{u_1^2} > \overline{u_2^2}$ ergeben (Abb.4.94 bis 4.97). Dennoch, ein wirklich signifikanter und eindeutiger Einfluß der genaueren Modellierung der turbulenten Normalspannungen kann nicht festgestellt werden.

Dieses steht in einem gewissen Widerspruch zu einer Arbeit von LIEN ET AL [LCL96], in der das nichtlineare SZL-Modell mit einer Low-Reynolds-Number-Formulierung gekoppelt wird. Die lineare Version dieses Modells liefert $x_R/H \approx 4$, die nichtlineare Version hingegen $x_R/H \approx 5.7$, also ein erheblich zu großes Rückströmgebiet. Es wurde bereits mehrfach darauf hingewiesen, daß das SZL-Modell tatsächlich nur eine sehr schwache Anisotropie der turbulenten Normalspannungen aufweist. Dieses kann man auch an den Darstellungen der Normalspannungen hinter dem Hügel erkennen. In der Low-Reynolds-Number-Formulierung wird das Modell jedoch auch in Bereichen angewendet in denen η sehr groß ist, nämlich sehr nah an der Wand. Dieses führt dann zu einem signifikanten Beitrag der nichtlinearen Terme, der erheblich größer ist als im übrigen Strömungsgebiet. Dies mag den großen Einfluß der nichtlinearen Terme erklären. Angemerkt sei noch, daß LIEN ET AL [LCL96] eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung erst erhalten, wenn sie nichtlineare Terme bis zur dritten Ordnung hinzunehmen (kubisches nichtlineares Modell). Der Einfluß der kubischen Terme macht sich insbesondere auf der stromabwärts gelegen Seite des Hügels bemerkbar. Nach LIEN ET AL [LCL96] erhöhen die kubischen Terme die Sensitivität des Turbulenzmodells gegenüber der Krümmung der Stromlinien, die dort eine anfachende Wirkung auf die Turbulenz hat. Diese gegenüber dem quadratischen nichtlinearen Modell erhöhte Turbulenz könnte die mit dem kubischen Modell berechnete kleinere Rezirkulationszone erklären. In der vorliegenden Arbeit konnte jedoch kein signifikanter Einfluß der nichtlinearen Terme festgestellt werden und insofern können die Beobachtungen von LIEN ET AL [LCL96] hier nicht bestätigt werden.

Beurteilung der Ergebnisse

Die Anwendung der Turbulenzmodelle auf die Strömung über einen 2-dimensionalen Hügel führt zu einem zwiespältigen Ergebnis. Ähnlich wie bei der zurückspringenden Stufe steht das mit den neuen Modellen berechnete Geschwindigkeitsfeld in wesentlich besserer Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Die Turbulenzenergie und die turbulenten Spannungen werden aber vor allem in der Rezirkulationszone nur sehr ungenau wiedergegeben. Die genauere Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes ist auch in diesem Fall auf die Reduzierung des turbulenten Impulstransportes in Gebieten großer Geschwindigkeitsgradienten zurückzuführen. Die turbulenten Normalspannungen haben keinen entscheidenden Einfluß auf das Strömungsfeld.

Diese Beobachtungen führen zu der Schlußfolgerung, daß die neuen Modelle offensichtlich eine insgesamt realistischere Modellierung des turbulenten Impulstransportes ermöglichen, ohne jedoch die Turbulenzstruktur genau wiedergeben zu können.

5 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde erstmals eine systematische Untersuchung einer neuen Generation expliziter algebraischer Reynolds-Spannungsmodelle durchgeführt. Zielsetzung dieser Untersuchung war die Umsetzung dieser neuen Entwicklungen in die industrielle Anwendung. Dazu wurden die neuen Modellen zunächst in einheitlicher Form dargestellt und dann anhand verschiedener Strömungsprobleme auf ihre elementaren Eigenschaften hin untersucht. Anschließend wurden diese neuen Modelle in den kommerziellen CFD-Code FLOTRAN implementiert und auf einige komplexe Strömungen angewendet.

Explizite algebraische Reynolds-Spannungsmodelle wurden von POPE [Pop75], TAULBEE [Tau92] bzw. GATSKI und SPEZIALE [GS92] aus den Transportgleichungen der turbulenten Spannungen abgeleitet. Die in dieser Arbeit verwendete vollständig explizite Formulierung dieser Modelle wurde von GIRIMAJI [Gir95] entwickelt. Das ebenfalls untersuchte explizite algebraische Reynolds-Spannungsmodell von SHIH, ZHU und LUMLEY [SZL93] basiert dagegen auf konstitutiven Gleichungen und auf Überlegungen zur Realizability der Turbulenzmodelle. Weiterhin wurden das lineare RNG-Modell nach YAKHOT [Y+92] und das lineare Modell von SHIH ET AL [S+94] in die Untersuchungen einbezogen.

Im Unterschied zum Standard k - ϵ -Modell sind bei den neuen Modellen zum einen die Modellkoeffizienten vom lokalen Strömungsfeld abhängige Größen und zum anderen wurde die lineare Beziehung zwischen den turbulenten Spannungen und dem lokalen Geschwindigkeitsfeld durch eine komplexere nichtlineare Beziehung ersetzt. Die neuen linearen Modelle unterscheiden sich in der Modellierung der Dissipationsgleichung. Das RNG-Modell erfährt eine Anpassung an das lokale Strömungsfeld nur über eine Korrektur des Koeffizienten $C_{\epsilon,1}$ und entspricht ansonsten dem Standard k - ϵ -Modell. Dagegen ist beim neuen linearen Modell von SHIH ET AL die Modellierung der Dissipationsgleichung vollständig unabhängig von der Bilanzgleichung der Turbulenzenergie und gleichzeitig sind alle Koeffizienten vom lokalen Strömungsfeld abhängig.

Expliziten algebraischen Reynolds-Spannungsmodellen liegt die fundamentale Annahme eines lokalen Gleichgewichts in den Transportgleichungen der turbulenten Spannungen zugrunde. Weiterhin tritt in diesen Modellen der Produktionsterm der turbulenten Spannungen nicht mehr auf, der für die starke Kopplung der turbulenten Spannungen verantwortlich ist. Diese Modelle sind daher grundsätzlich nicht in der Lage, die Sensitivität der Turbulenzstruktur gegenüber sogenannten Sekundärdeformationen, also z.B. einer Stromlinienkrümmung, realistisch wiederzugeben. In dieser Hinsicht unterscheiden sich die in dieser Arbeit untersuchten neuen expliziten algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle nicht vom Standard k - ϵ -Modell. Die genannten drastischen physikalischen Vereinfachungen führen aber zu numerisch sehr viel stabileren Turbulenzmodellen; sie sind gewissermaßen der Preis, den man für die numerische Stabilität und Effizienz des Turbulenzmodells bezahlt.

Die Abhängigkeit der Modellkoeffizienten vom lokalen Strömungsfeld wird durch dimensionslose Invarianten des Deformations- und Rotationstensors ausgedrückt. Es zeigte sich, daß alle Modelle eine reziproke Abhängigkeit des Koeffizienten C_μ vom Verhältnis der Turbulenzproduktion zur Dissipation P_k/ϵ ergeben, die qualitativ durch Experimente

bestätigt wird. Die physikalische Bedeutung der Abhängigkeit der Modellkoeffizienten vom lokalen Strömungsfeld liegt in der Anpassung des Modells an Ungleichgewichtszustände in der Bilanz der Turbulenzenergie. Die dem Standard k - ϵ -Modell zugrundeliegende Annahme eines konstanten $C_\mu=0.09$ ist nur im Gleichgewichtsfall $P_k/\epsilon=1$ sinnvoll, und dann auch nur für einige einfache Scherströmungen. Ganz analog dazu werden beim linearen Modell von SHIH ET AL und beim RNG-Modell auch die Koeffizienten in der Dissipationsgleichung an lokale Ungleichgewichtszustände angepaßt.

Diese Anpassung an das lokale Strömungsfeld bewirkt eine erhebliche Reduzierung der Turbulenz an Orten großer Geschwindigkeitsgradienten, wie sie z.B. bei einer starken Umlenkung der Strömung vor einem stumpfen Körper oder auch in stark konvergierenden Kanälen auftreten. Dieser Sachverhalt wurde anhand einer axialsymmetrischen Staupunktströmung und der Umströmung eines NACA 0012 Tragflügelprofils eingehender untersucht, wobei die neuen Modelle für beide Fälle signifikant bessere Ergebnisse liefern als das Standard k - ϵ -Modell.

Die nichtlinearen expliziten algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle geben die Anisotropie der turbulenten Normalspannungen grundsätzlich genauer wieder als das entsprechende lineare Modell. Die Anisotropie ist u.a. verantwortlich für das Auftreten von Sekundärströmungen in nicht-kreisförmigen Kanälen, während die turbulenten Schubspannungen den Sekundärströmungen entgegen wirken. Anhand der eingelaufenen Strömung in einem quadratischen Kanal konnte gezeigt werden, daß die meisten Modellkombinationen eine viel zu kleine Anisotropie der turbulenten Normalspannungen und/oder viel zu große Schubspannungen liefern. Dieses gilt insbesondere für das nichtlineare Modell von SHIH, ZHU und LUMLEY. Lediglich die Modellkombinationen GIR-TB und TB-TB ergaben Sekundärströmungen realistischer Größenordnung.

Eine eingehende Untersuchung der Turbulenzmodelle erfolgte für die Strömung über eine zurückspringende Stufe und die ablösende Strömung über einen 2-dimensionalen Hügel. In beiden Fällen wurden die Ergebnisse mit experimentellen Daten und, falls vorhanden, zusätzlich mit anderen numerischen Berechnungen verglichen. Die Ergebnisse lassen im wesentlichen zwei Schlußfolgerungen zu.

Zum einen konnte für das Geschwindigkeitsfeld generell eine deutlich bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Daten festgestellt werden. In den beiden genannten Anwendungsfällen spiegelt die Größe der Rezirkulationszone die Summe aller Einflüsse auf das Strömungsfeld wieder, sie dient daher als Maß für die Genauigkeit der Berechnung. Während das Standard k - ϵ -Modell ein um 25% (Stufe) bzw. 50% (Hügel) zu kleines Rückströmgebiet liefert, stehen die neuen Modelle in recht guter Übereinstimmung mit den Messungen; die verbleibenden Abweichungen liegen unter 5%.

Es ist naheliegend zu erwarten, daß sich diese drastischen Verbesserungen auch in den Verteilungen der Turbulenzenergie und der turbulenten Spannungen widerspiegeln. Die zweite Schlußfolgerung aus diesen Vergleichen ist aber, daß die neuen Modelle in einzelnen Bereichen des Strömungsfeldes zwar eine tendenziell bessere Übereinstimmung mit den Experimenten aufweisen, dieses aber keineswegs generell der Fall ist und die Abweichungen vor allem innerhalb der Rezirkulationszonen nachwievor sehr groß sind.

Festzuhalten ist weiterhin, daß zumindest bei den in dieser Arbeit untersuchten Strömungsproblemen die genauere Modellierung der turbulenten Normalspannungen nur einen marginalen Einfluß auf das Strömungsfeld ergab. Letzteres steht im Widerspruch zu den Beobachtungen von YAKHOT ET AL [Y⁺92] und THANGAM ET AL [TS92]. Die in diesen beiden Arbeiten untersuchten nichtlinearen Modelle überschätzen jedoch die Anisotropie der Normalspannungen, weil die Koeffizienten vor den nichtlinearen Termen als konstant angenommen und damit letztlich an Gleichgewichtsströmungen angepaßt worden sind. Gleichzeitig werden die turbulenten Schubspannungen von diesen Modellen unterschätzt, so daß der Einfluß der turbulenten Normalspannungen relativ überschätzt wird. Dieses erklärt die unterschiedlichen Befunde. Aufgrund der generell großen Abweichungen der berechneten Normalspannungen von den Meßwerten ist eine eindeutige Aussage hinsichtlich des tatsächlichen Einflusses der Anisotropie der turbulenten Normalspannungen noch nicht möglich.

Im einzelnen ergab das lineare RNG- k - ϵ -Modell bei den in dieser Arbeit untersuchten Strömungsproblemen recht gute Ergebnisse. Aufgrund der fehlenden Berücksichtigung des Rotationstensors in den Koeffizienten ist dieses Modell aber weniger allgemeingültig als die anderen. Ferner führt die Modifikationen in der Dissipationsgleichung zu einer leichten Verschlechterung der Konvergenz.

Das neue lineare k - ϵ -Modell von SHIH ET AL lieferte ähnlich gute Ergebnisse. Auch dieses Modell stellt eine klare Verbesserung gegenüber dem Standard k - ϵ -Modell dar. Die neue Modellierung der Dissipationsgleichung erwies sich grundsätzlich als numerisch stabil und effizient, die Konvergenz war allerdings etwas langsamer als beim Standard k - ϵ -Modell und bei den nichtlinearen Modellen GIR-TB und TB-TB. Die Anwendung dieses Modells erscheint also nur sinnvoll, wenn das Versagen des Turbulenzmodells unmittelbar auf die Dissipationsgleichung zurückzuführen ist.

Das SZL-Modell ergab bei allen Anwendungen trotz der doch sehr einfachen (empirischen) Ansätze für die Koeffizienten überraschend gute Ergebnisse. Die nichtlinearen Terme dieses Modells können aber vollständig vernachlässigt werden, da die Koeffizienten vor diesen Termen unrealistisch kleine Werte annehmen und daher praktisch keinen Einfluß auf das Strömungsfeld haben. Dieses Modell erwies sich als numerisch außerordentlich stabil und effizient.

Die aus den Transportgleichungen abgeleiteten nichtlinearen Modelle von GIRIMAJI (GIR) und das entsprechende Modell nach dem Algebraisierungsansatz von TAULBEE (TB) lieferten die insgesamt besten Ergebnisse. Aus einer Reihe verschiedener möglicher Koeffizienten stellten sich die nach TAULBEE als bester Kompromiß heraus. Es zeigte sich ferner, daß eine reine Anpassung an homogene Strömungen, wie sie von SPEZIALE ET AL durchgeführt wird, nicht ausreichend ist. Das daraus resultierende Modell lieferte in inhomogenen Strömungen zu niedrige turbulente Spannungen.

Zur besseren Übersicht werden die Ergebnisse für die wichtigsten Modelle in der folgenden Tabelle zusammengefaßt. Dabei sind die Aussagen relativ zum Standard k - ϵ -Modell zu sehen und nicht absolut. Berücksichtigt werden in dieser Tabelle nur die Modelle und

Modellvarianten, die sich als insgesamt dem Standard k - ϵ -Modell überlegen herausgestellt haben.

Tabelle 5.21: Zusammenfassender Vergleich der Turbulenzmodelle.
(Nomenklatur in Kapitel 3, Tabelle 2.2 bis 2.4).

Modell	Version	Stufe	Hügel	Kanal	Staupunkt	Tragflügel
SKE		0	0	0	0	0
NKE		++	+	0	++	+
RNG		++	+	0	+	+
GIR	SSG	–	–	+	++	
	TB	++	++	++	++	++
TB	SSG	–	–	+	++	
	TB	++	++	++	++	++
SZL		++	++	0	++	++

Die Modellversionen GIR-TB und TB-TB lieferten für alle in dieser Arbeit behandelten Strömungsprobleme sehr gute Ergebnisse, wobei die Ergebnisse der beiden Modelle praktisch identisch sind. Als einzige geben diese Modelle die in quadratischen Kanälen auftretenden Sekundärströmungen realistisch wieder. Damit konnte nachgewiesen werden, daß diese Modelle auch in 3-dimensionalen Strömungen die Anisotropie der turbulenten Normalspannungen gut wiedergeben. Da aber die nichtlinearen Terme eine Verschlechterung der Konvergenzrate zur Folge haben und sie nur in wenigen Anwendungen zu einer signifikanten Verbesserung des Ergebnisses führen, ist eine Vernachlässigung der nichtlinearen Terme in vielen Fällen möglich und sinnvoll. Diese Modellkombinationen haben sich insgesamt als die mit den physikalisch realistischsten Ergebnissen herauskristallisiert.

Generell erwiesen sich die untersuchten Modelle, - eine geeignete Wahl der Koeffizienten vorausgesetzt-, als numerisch genauso stabil und effizient wie das Standard k - ϵ -Modell. Die Rechenzeiten erhöhen sich aufgrund der variablen Koeffizienten um 5 bis 10%, d.h. es sind nur wenige zusätzliche Iterationen erforderlich. Die nichtlinearen Terme verursachen einen Anstieg des Rechenaufwandes um weitere 10%. Der zusätzliche Rechenaufwand ist also in Relation zu den erzielbaren Verbesserungen vergleichsweise klein.

Es konnte gezeigt werden, daß die mit den oben empfohlenen expliziten algebraischen Modellen erzielbaren Verbesserungen technisch relevant sind. Eine zuverlässigere Berechnung der Strömung ist immer dann zu erwarten, wenn im Strömungsfeld große Geschwindigkeitsgradienten auftreten. Zu nennen sind hier Strömungen mit Staupunkten oder starken Umlenkungen, Strömungen in stark gekrümmten Kanälen, axial beschleunigte Strömungen (Düsen), Drallströmungen und Strömungen in rotierenden Kanälen. Vor allem Ablösungen und Rezirkulationszonen werden zuverlässiger vorhergesagt, was in vielen technischen Anwendungen entscheidend ist.

A N H A N G

A Beschreibung des numerischen Verfahrens

In dieser Arbeit wird die Methode der Finiten Elemente zur Lösung der Bilanzgleichungen verwendet. Das numerische Verfahren wurde von SCHNIPKE [Sch86] entwickelt und für eine detaillierte Beschreibung sei auf diese Arbeit verwiesen. Da die Finite Elemente Methode in der numerischen Strömungsmechanik nicht sehr gebräuchlich ist, werden die Grundzüge des numerischen Verfahrens sowie die Implementierung der neuen Turbulenzmodelle in folgenden kurz dargestellt. Die Angabe der Randbedingungen an der Wand ist bei turbulenten Strömungen problematisch, so daß dieser Sachverhalt etwas ausführlicher beschrieben wird.

Die Berechnung der rezirkulierenden Raumströmung, der Strömung über eine zurückspringende Stufe und der über einen 2-dimensionalen Hügel wurde mit dem kommerziellen FEM-Programm FLOTRAN durchgeführt, das nach dem genannten Verfahren arbeitet. Die eingelaufene Strömung in einem quadratischen Kanal wurde mit einem eigenen Programm berechnet, daß ebenfalls auf der gleichen Methode basiert, bei dem aber die Angabe der Randbedingungen modifiziert wurde.

Da im Rahmen dieser Arbeit lediglich stationäre, inkompressible Strömungen mit konstanten Stoffwerten behandelt werden, beschränkt sich auch die folgende Darstellung auf diesen Fall.

A.1 Diskretisierung der Bilanzgleichungen

Betrachtet werde eine allgemeine Bilanzgleichung der abhängigen Variable Φ

$$\rho U_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \rho U_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \rho U_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + S_\Phi \quad , \quad (1.109)$$

in der S_Φ ein Quellterm und Γ_Φ der Diffusionskoeffizient sind. Die je nach Bilanzgleichung einzusetzenden Größen sind in Tabelle 1.22 zusammengefaßt.

Tabelle 1.22: Variablen der allgemeinen Transportgleichung.

Φ	Γ_Φ	S_Φ	Bemerkungen
U_x	$\mu + \mu_\tau$	$-\partial P / \partial x$	(Gl.2.4)
U_y	$\mu + \mu_\tau$	$-\partial P / \partial y$	(Gl.2.4)
U_z	$\mu + \mu_\tau$	$-\partial P / \partial z$	(Gl.2.4)
k	μ_τ / σ_k	$P_k - \rho \epsilon$	(Gl.2.7)
ϵ	$\mu_\tau / \sigma_\epsilon$	$C_{\epsilon,1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon,2} \rho \frac{\epsilon^2}{k}$	Standardmodell (Gl.2.8)
ϵ	$\mu_\tau / \sigma_\epsilon$	$C_{\epsilon,1} P_\epsilon - C_{\epsilon,2} \rho \frac{\epsilon^2}{k}$	Neues Modell (Gl.2.73)

Die schwache Form dieser Gleichung erhält man nach Multiplikation mit der Gewichtsfunktion W

$$\int_{\Omega} W \left[\rho U_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \rho U_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \rho U_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] d\Omega = \quad (1.110)$$

$$\int_{\Omega} W \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + S_{\Phi} \right] d\Omega .$$

Nach partieller Differentiation und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes erhält man dann folgende Gleichung

$$\int_{\Omega} W \left[\rho U_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \rho U_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \rho U_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] d\Omega = \quad (1.111)$$

$$\int_{\Omega} W S_{\Phi} d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) d\Omega \quad (1.112)$$

$$+ \int_S W \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy dz + \int_S W \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dz + \int_S W \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} dx dy ,$$

in der alle zweiten Ableitungen eliminiert sind. Die Integration erfolgt nicht über das gesamte Integrationsgebiet Ω , sondern elementweise über Ω^e , wobei innerhalb eines Elementes die abhängige Variable Φ durch den Ansatz

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{j=1}^m W_j^e(x, y, z) \Phi_j \quad (1.113)$$

approximiert wird. Die $W_j^e(x, y, z)$ werden als Interpolations- oder auch Formfunktionen bezeichnet, m ist die Anzahl der Knoten des Elementes und Φ_j der Wert der Variablen am Knoten j . Im Rahmen dieser Arbeit werden lediglich lineare Formfunktionen und viereckige Elemente verwendet. Eine wichtige Konsequenz ist, daß auf diese Weise die Gradienten der unabhängigen Variable Φ nicht stetig über Elementgrenzen hinweg sind.

Den Konvektions- und Diffusionsterm faßt man zur Elementkoeffizientenmatrix K_{ij}^e zusammen

$$K_{ij}^e = K_{ij}^e, \text{Konvektion} + K_{ij}^e, \text{Diffusion} . \quad (1.114)$$

Diffusionsmatrix

$$K_{ij}^e, \text{Diffusion} = \int_{\Omega^e} \left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial W_i^e}{\partial x} \frac{\partial W_j^e}{\partial x} + \Gamma_{\Phi} \frac{\partial W_i^e}{\partial y} \frac{\partial W_j^e}{\partial y} + \Gamma_{\Phi} \frac{\partial W_i^e}{\partial z} \frac{\partial W_j^e}{\partial z} \right) d\Omega^e . \quad (1.115)$$

Konvektionsmatrix

Die Anwendung dieser Diskretisierungsmethode auf den Konvektionsterm führt bei hohen Reynolds-Zahlen zur Instabilität des numerischen Verfahrens. Daher wurde von SCHNIPKE

[Sch86] die folgende als *monoton streamline upwind method* bezeichnete Diskretisierung vorgeschlagen.

Reine Konvektion ist ein Charakteristikenproblem, d.h. der Transport der abhängigen Variablen Φ erfolgt entlang charakteristischer Linien, hier entlang der Stromlinien. Transformiert man den konvektiven Term in Stromlinienkoordinaten so findet man

$$\int_{\Omega^e} W^e \left[\rho U_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \rho U_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \rho U_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] d\Omega^e = \int_{\Omega^e} W \left[\rho U_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} \right] d\Omega^e \quad (1.116)$$

Die Diskretisierung basiert auf der Annahme, daß innerhalb eines Elementes der konvektive Transport entlang der Stromlinie konstant ist

$$\rho U_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = \text{konstant} . \quad (1.117)$$

Damit kann man diesen Term vor das Integral ziehen und für den Konvektionsterm findet man

$$K_{ij, \text{Konvektion}}^e = \rho U_s \frac{d\Phi}{dx_s} \int_{\Omega^e} W^e d\Omega^e \quad (1.118)$$

Der Gradient entlang der Stromlinie wird durch eine einfache zentrale Differenz

$$\frac{d\Phi}{dx_s} = \frac{\Phi_U - \Phi_D}{\Delta S} \quad (1.119)$$

berechnet, wobei der Index D den stromabwärts gelegenen und der Index U den stromaufwärts gelegenen Wert bezeichnet. Die Bestimmung dieser Werte erfolgt durch Interpolation innerhalb des Elementes, wobei die Lage des stromaufwärts gelegenen Punktes aus dem Verhältnis der Massenströme über die Elementseiten folgt.

SCHNIPKE [Sch86] zeigt in ihrer Arbeit, daß diese Diskretisierung numerisch robust ist, ohne aber Ursache hoher numerischer Diffusion zu sein. Wie bei allen numerischen Verfahren kann dies aber nur durch hinreichend feine Netze sichergestellt werden.

Elementquelltermvektor

Der Elementquelltermvektor lautet

$$F_i^e = \int_{\Omega^e} W_i^e S_\Phi d\Omega^e + \int_S W_i^e \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} dydz + \int_S W_i^e \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dz + \int_S W_i^e \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} dx dy . \quad (1.120)$$

Die hier auftretenden Oberflächenterme heben sich innerhalb des Strömungsgebietes gegenseitig auf und sind an allen Wänden und Symmetrielinien gleich Null. Setzt man diese Terme am Einström- und Ausströmrand auf Null, so entspricht dies der Anwendung natürlicher Randbedingungen, d.h. die Gradienten der Unbekannten Φ werden senkrecht zum Ein- bzw. Ausströmrand auf Null gesetzt.

Koeffizientenmatrix und Quelltermvektor des Gesamtsystems

Die Koeffizientenmatrix und den Quelltermvektor des Gesamtsystems erhält man dann durch Summation über alle Elemente

$$K_{ij} = \sum_{j=1}^N K_{ij}^e \quad (1.121)$$

$$F_i = \sum_{j=1}^N F_i^e \quad (1.122)$$

und das resultierende algebraische Gleichungssystem lautet

$$K_{ij}\Phi_i = F_i. \quad (1.123)$$

Dieses algebraische Gleichungssystem wird anschließend mit einem Standardverfahren (TDMA) für jede Gleichung gelöst. Der in den Impulsbilanzen auftretende Druck wird aus einer dem bekannten SIMPLER-Verfahren analogen Methode berechnet. Die Übertragung dieses Verfahrens auf die Methode der Finiten Elemente wurde ebenfalls von SCHNIPKE [Sch86] entwickelt, für nähere Einzelheiten sei auf ihre Arbeit verwiesen. Die resultierende Druckgleichung wird ebenfalls nach dem oben beschriebenen Verfahren diskretisiert. Man erhält dann eine symmetrische und positiv definite Koeffizientenmatrix, so daß die Methode der konjugierten Gradienten zur Lösung des Gleichungssystems verwendet werden kann.

Die numerische Integration (Gaußsche Quadratur) erfolgt dann über ein Einheitselement, auf das das reale Element projiziert wird.

Nacheinander werden zunächst die Impulsbilanzen, die Druckgleichung und anschließend die Bilanzgleichungen der Turbulenzenergie und Dissipation gelöst. Aufgrund der Nichtlinearität des Gleichungssystems ist eine iterative Lösung erforderlich, man bezeichnet dies als die globale oder äußere Iteration. Innerhalb einer globalen Iteration wird über die Druckgleichung solange iteriert, bis die Druckgleichung bis zu einem gewissen Maße konvergiert ist. Der gesamte Lösungsprozeß wird auch als entkoppelte Lösung (segregated solution) bezeichnet.

A.2 Implementierung der Turbulenzmodelle

Lineare Modelle mit variablen Koeffizienten

Der lineare Term der algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle ändert sich gegenüber dem Standardmodell nur insofern, als daß der Koeffizient C_μ , der zur Berechnung der turbulenten Viskosität (Gl.2.6) benötigt wird, eine vom lokalen Strömungsfeld abhängige Größe ist. Da die Geschwindigkeitsgradienten aufgrund der Verwendung linearer Formfunktionen nicht stetig über Elementgrenzen hinweg sind, wäre eine knotenweise Berechnung des lokalen C_μ nicht konsistent mit der linearen Approximation der Geschwindigkeitsverteilung innerhalb eines Elementes. Grundsätzlich ist sie aber möglich. Es ist aber sehr viel einfacher, das lokale C_μ elementweise zu berechnen und dann innerhalb eines jeden

Elementes die knotenweise mit $C'_\mu = 0.09$ berechnete Wirbelviskosität zu korrigieren. Da die Variation des C'_μ innerhalb eines Elementes sehr klein ist, genügt es, C'_μ jeweils für die Elementmitte zu berechnen, d.h. C'_μ wird als konstant über das Element angenommen. Ein Vergleich der in dieser Arbeit berechneten Ergebnisse mit anderen Arbeiten zeigt, daß diese Methode hinreichend genau ist.

Modifizierte Dissipationsgleichung

Eine analoge Vorgehensweise wurde für den in den modifizierten Dissipationsgleichungen auftretenden vom lokalen Strömungsfeld abhängigen Koeffizienten $C_{\epsilon,1}$ gewählt. Auch hier wird angenommen, daß der Koeffizient konstant über ein Element ist und wird daher jeweils in der Elementmitte berechnet.

Nichtlineare Terme

Der lineare Anteil der Turbulenzmodelle ist bereits durch die turbulente Viskosität in die Bilanzgleichungen implementiert worden. Der zusätzliche nichtlineare Anteil tritt in den Impulsbilanzen in der folgenden allgemeinen Form auf

$$\dots = -\frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}^{\text{NL}}}{\partial x_j} . \quad (1.124)$$

Auch diese Terme überführt man durch Multiplikation mit der Gewichtsfunktion W_i in ihre schwache Form

$$\dots = -\int_{\Omega^e} W_i^e \frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}^{\text{NL}}}{\partial x_j} d\Omega^e . \quad (1.125)$$

Partielle Differentiation

$$\frac{\partial W_i^e \overline{\rho u_i u_j}^{\text{NL}}}{\partial x_j} = W_i^e \frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}^{\text{NL}}}{\partial x_j} + \overline{\rho u_i u_j}^{\text{NL}} \frac{\partial W_i^e}{\partial x_j} \quad (1.126)$$

liefert dann

$$\dots = \int_{\Omega^e} \overline{\rho u_i u_j}^{\text{NL}} \frac{\partial W_i^e}{\partial x_j} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \frac{\partial W_i^e \overline{\rho u_i u_j}^{\text{NL}}}{\partial x_j} d\Omega^e . \quad (1.127)$$

Der zweite Term der obigen Gleichung kann mit dem Gauß'schen Integralsatz in ein Oberflächenintegral überführt werden

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial W_i^e \overline{\rho u_i u_j}^{\text{NL}}}{\partial x_j} d\Omega^e = \int_{S^e} W_i^e \overline{\rho u_i u_j}^{\text{NL}} n_j dS^e , \quad (1.128)$$

wobei n_j der Normaleneinheitsvektor ist.

Aufgrund der linearen Approximation des Geschwindigkeitsfeldes und des damit verbundenen unstetigen Verlaufs der turbulenten Spannungen über Elementgrenzen hinweg, heben sich diese Oberflächenterme innerhalb des Strömungsgebietes nicht gegenseitig auf. Zumindest bei hinreichender Netzfeinheit wird die resultierende Differenz zwischen den Oberflächentermen aber sehr klein sein, so daß deren Vernachlässigung zu keinem großen

Fehler führt.

An Symmetrielinien und festen Wände verschwinden die Oberflächenterme ganz, weil der Impulstransport senkrecht zur Oberfläche gleich Null ist. Am Einström- und am Auströmrand sind diese Terme gegenüber dem konvektiven Transport vernachlässigbar.

Die nichtlinearen Terme liefern also einen zusätzlichen Quellterm der allgemeinen Form

$$\dots = \int_{\Omega^e} \overline{\rho u_i u_j}^{\text{NL}} \frac{\partial W_i^e}{\partial x_j} d\Omega^e, \quad (1.129)$$

der zu dem Quellterm der jeweiligen Impulsbilanz addiert wird.

Die nichtlinearen Terme der Spannungs-Dehnungs-Beziehung werden also vollständig explizit behandelt. Eine implizite Implementierung wäre aufgrund der komplizierten Abhängigkeit der turbulenten Spannungen von den lokalen Geschwindigkeitsgradienten sehr aufwendig, so daß darauf verzichtet wird.

A.3 Randbedingungen

Die Angabe der Randbedingungen in turbulenten Strömungen bedarf besonderer Aufmerksamkeit. Die in dieser Arbeit verwendeten Turbulenzmodelle gelten nur für vollturbulente Strömungen, sie können also nicht in unmittelbarer Wandnähe angewendet werden. Der wandnahe Bereich wird daher mit universellen Wandfunktionen überbrückt.

Die Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld werden mit Hilfe der folgenden universellen Geschwindigkeitsgesetze bestimmt.

$$\begin{aligned} U^+ &= y^+ && \text{falls } y^+ < 11.5 \\ U^+ &= \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B && \text{falls } y^+ \geq 11.5 \end{aligned} \quad (1.130)$$

$$\text{mit} \quad \kappa = 0.41, \quad B = \frac{1}{\kappa} \ln E \quad \text{und} \quad E = 7.8 \quad \text{für} \quad B = 5.0$$

Diese Gleichungen werden benutzt, um die lokale Wandschubspannung zu bestimmen, die sich entsprechend der wandparallelen Geschwindigkeitskomponente U_c am wandnahen Knoten iterativ aus den obigen Gleichungen errechnen läßt. Aus dem Ansatz

$$\tau_w = \mu_w \frac{U_c}{y_c} \quad (1.131)$$

folgt durch einfaches Umstellen

$$\mu_w = \frac{\tau_w}{U_c / y_c}, \quad (1.132)$$

wobei U_c die wandparallele Strömungsgeschwindigkeit am wandnahen Knoten mit dem senkrechten Wandabstand y_c ist. Nach Einsetzen der universellen Wandgesetze erhält man folgende Bestimmungsgleichung für die Wandwirbelviskosität

$$\mu_w = \mu \max \left[1, \frac{\kappa y_c^+}{\ln E y_c^+} \right]. \quad (1.133)$$

In dieser Form wird nun kein fester Übergangspunkt von der linearen zur logarithmischen Wandfunktion definiert, sondern er ergibt sich automatisch, weil der jeweils größere Wert der Wirbelviskosität gewählt wird. Bei der Integration der Impulsbilanzgleichungen setzt man nun diese Wandwirbelviskosität im Wandelement ein. Auf diese Weise wird ganz normal über das Wandelement integriert und als Randbedingungen an festen Wänden müssen dort lediglich die Geschwindigkeitskomponenten zu Null gesetzt werden. Eine gewisse Ungenauigkeit entsteht dadurch, daß bei der Integration bis zur Wand zusätzlich zum wandsenkrechten Geschwindigkeitsgradienten auch wandparallele auftreten können. In aller Regel wird aber die lokale Turbulenzproduktion und damit die Wirbelviskosität durch den wandsenkrechten Gradienten dominiert, so daß die Fehler sehr klein sein wird.

Diese Wandwirbelviskosität ist eine Kunstgröße, sie unterscheidet sich in der Regel sehr stark von dem Wert, den man nach dem Ansatz von JONES und LAUNDER (Gl.2.6) erhalten würde. Die direkte Integration bis zur Wand kommt der absolut unrealistischen Approximation des wandsenkrechten Geschwindigkeitsgradienten durch

$$U_{1,2} \approx \frac{U_c}{y_c} \quad (1.134)$$

gleich, wobei $U_{1,2}$ der wandsenkrechte Gradient der wandparallelen Geschwindigkeitskomponente ist.

Die Wandwirbelviskosität korrigiert diese Approximation derart, daß die Geschwindigkeitsverteilung im Wandelement den universellen Wandgesetzen gehorcht.

Integration der nichtlinearen Terme

Entsprechend des in FLOTRAN realisierten Verfahrens müssen auch diese Terme über das Wandelement integriert werden. Betrachtet man zunächst wieder nur die resultierende wandparallele Geschwindigkeitskomponente $U_{1,2}$ und vernachlässigt die wandparallelen Geschwindigkeitsgradienten, so liefern die nichtlinearen Terme Ausdrücke der Form

$$\dots = C_{i,\text{eff}} \frac{k^3}{\epsilon^2} U_{1,2}^2, \quad (1.135)$$

wobei $C_{i,\text{eff}}$ sich aus den Koeffizienten des jeweiligen nichtlinearen Modells ergibt.

In diesem lokalen Stromlinienkoordinatensystem ergeben die quadratischen Terme keinen Beitrag zur turbulenten Schubspannung. Da die Wand beliebig im Raum orientiert sein kann, muß der resultierende Tensor der turbulenten Spannungen in das globale Koordinatensystem transformiert werden, in dem dann auch die turbulenten Schubspannungen ungleich Null sind. Diese Transformation ist im Prinzip möglich, erwies sich aber als programmtechnisch sehr umständlich. Außerdem würde man auf diese Weise die wandparallelen Geschwindigkeitsgradienten vernachlässigen, was zwar nicht unbedingt die Ungenauigkeit wesentlich vergrößern würde, aber inkonsistent zur Behandlung des linearen

Terms wäre.

Aufgrund dieser Schwierigkeit wurde eine andere, zur Behandlung des linearen Terms analoge Methode verwendet. Nach Einführung der Wirbelviskosität kann man den nicht-linearen Term umschreiben zu

$$\dots = \mu_w U_{1,2} \times \frac{C_{i,\text{eff}} k}{C_\mu \epsilon} U_{1,2} . \quad (1.136)$$

Der erste Term bedarf offensichtlich keiner weiteren Behandlung, er entspricht gerade dem linearen Term. Im zweiten Term tritt der Quotient k/ϵ auf, den man aus den üblichen Gleichgewichtsrandbedingungen bestimmen könnte. Die direkte Integration der Impulsbilanzen bis zur Wand entspricht jedoch, wie schon oben gezeigt, der unrealistischen Approximation

$$U_{1,2} \approx \frac{U_c}{y_c} , \quad (1.137)$$

so daß dieser Term je nach Lage des wandnahen Knoten völlig unrealistische Werte annehmen kann.

In Analogie zur Wandwirbelviskosität wird nun mit Hilfe der universellen Wandgesetze der Quotient k/ϵ derart bestimmt, daß er eine Korrektur der unrealistischen Approximation des Geschwindigkeitsgradienten darstellt.

Zunächst berechnet man mit Hilfe der universellen Wandgesetze ein lokales η_c

$$\mu_w \leq \mu : \quad \eta_c = \frac{k \rho u_\tau}{\epsilon \mu} \quad (1.138)$$

$$\mu_w > \mu : \quad \eta_c = \frac{k}{\epsilon} \frac{1}{\kappa} \frac{u_\tau}{y_c} \quad (1.139)$$

und erhält dann umgekehrt aus

$$\left(\frac{k}{\epsilon} \right)_w = \eta_c \frac{y_c}{U_c} \quad (1.140)$$

einen zur Wandwirbelviskosität analogen Quotienten $(k/\epsilon)_w$. Dieser Wandquotient ist genauso wie die Wandwirbelviskosität eine reine Kunstgröße, die die unsinnige Approximation Geschwindigkeitsgradienten bei direkter Integration über das Wandelement korrigiert. Bei der anschließenden direkten Integration über das Wandelement treten nun zusätzlich wandparallele Geschwindigkeitsgradienten auf, die in dem obigen Ansatz nicht berücksichtigt worden sind. Da aber der Quotient k/ϵ genauso wie die Wandwirbelviskosität μ_w durch den wandsenkrechten Geschwindigkeitsgradienten dominiert wird, ist die dadurch entstehende Ungenauigkeit sehr klein.

Modifikation der Randbedingungen für den quadratischen Kanal

Die Integration der Impulsbilanzen bis zur Wand führte bei der Berechnung der Sekundärströmungswirbel im quadratischen Kanal zu erheblichen Konvergenzschwierigkeiten. Dabei

traten die Probleme im Ekelement und in den dem Ekelement benachbarten Elementen auf. Im Verlaufe der Iteration stellten sich lokale Spitzen der Sekundärströmungen ein, die letztlich zur Divergenz der Lösung führten. Eine genaue Analyse der Ursachen zeigte, daß dies auf Konvergenzprobleme der Druckgleichung zurückzuführen war. Die lokal sehr großen Sekundärströmungen werden beim Lösen der Druckgleichung derart korrigiert, daß die Massenbilanz erfüllt ist. In diesem Fall hätte das dazu führen müssen, daß die lokalen Maxima verschwinden. Genau dieses aber funktionierte im Ekelement nicht, mit der Konsequenz, daß die Massenbilanz in der Ecke und einigen benachbarten Elementen nicht erfüllt war.

Aufgrund dieser Problematik wurde die Angabe der Randbedingungen für die lateralen Geschwindigkeitskomponenten (Sekundärgeschwindigkeiten) modifiziert. Anstelle der Integration der Impulsbilanzen bis zur Wand, werden die lateralen Geschwindigkeitskomponenten explizit am wandnahen Knoten vorgegeben. Dieses entspricht der auch bei FD- und FV-Verfahren üblichen Methode. Die axiale Impulsbilanz wird weiterhin bis zur Wand in der beschriebenen Weise integriert.

Die Randbedingungen für die lateralen Geschwindigkeitskomponenten werden nach einer von DEMUREN und RODI [DR84] vorgeschlagenen Methode bestimmt. Die aus der axialen Geschwindigkeitskomponente U_1 resultierende Wandschubspannung $\tau_{w,1}$ wird in der schon beschriebenen Weise mit Hilfe des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes auf Basis der axialen Geschwindigkeit U_c am wandnahen Knoten ermittelt.

$$U_1 = U_\tau \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (1.141)$$

Die aus den lateralen Komponenten resultierende Wandschubspannung $\tau_{w,l}$ folgt aus der Anpassung des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes an den zweiten Knoten. Der wandnahe Knoten kann hier nicht verwendet werden, weil dort die Randbedingung vorgegeben werden soll. Das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz wird dabei in einer von DEMUREN und RODI [DR84] vorgeschlagenen Form verwendet

$$U_l = U_\tau \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \sin \phi, \quad (1.142)$$

wobei ϕ der Winkel zwischen der resultierenden Wandschubspannung $\tau_{w,r\,es}$ und der axialen Wandschubspannung $\tau_{w,1}$ ist.

Turbulenzenergie und Dissipation

Die Randbedingungen für die Turbulenzenergie und die Dissipation werden aus der zusätzlichen Annahme lokalen Gleichgewichts gewonnen. Vernachlässigt man Konvektion und Diffusion so erhält man für die Turbulenzenergie bzw. Dissipation folgende Ausdrücke:

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \epsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y_c} = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y_c} \quad (1.143)$$

Diese Randbedingungen werden normalerweise am wandnahen Knoten vorgegeben. FLOT-RAN verwendet hier eine etwas andere Methode der Implementierung. Das Programm

benutzt auch hier die Wandwirbelviskosität bei der Integration über das Wandelement und der Produktionsterm ergibt sich dann zu

$$P_k = \tau_w \frac{U_c}{y_c} = \mu_w \left(\frac{U_c}{y_c} \right)^2. \quad (1.144)$$

Mit diesem Produktionsterm kann die Bilanzgleichung der Turbulenzenergie bis zur Wand integriert werden, wobei der Konvektions- und Diffusionsterm im Wandelement auf Null gesetzt werden. Die Randbedingung für die Dissipation wird in der auch sonst üblichen Weise am wandnahen Knoten vorgegeben.

Korrektur für den quadratischen Kanal

Im Sinne einer möglichst genauen Berechnung muß die oben beschriebene Methode zur Angabe der Randbedingungen für den quadratischen Kanal korrigiert werden. Im Bereich der Ecke wird die Strömung und damit die Turbulenzproduktion durch zwei Wände beeinflusst, was in dem oben beschriebenen Verfahren noch nicht berücksichtigt ist. Auch hier wird wieder eine von DEMUREN und RODI [DR84] vorgeschlagene Modifikation eingeführt.

Die Randbedingungen der Turbulenzenergie und der Dissipation werden mit einem Faktor F_P in der folgenden Weise korrigiert

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu} \sqrt{F_P}} \quad \epsilon = F_P \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y}, \quad (1.145)$$

der sich für die Randbedingungen entlang der x_2 -Achse aus den Geschwindigkeitsgradienten wie folgt berechnet

$$F_P = 1 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 / \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2. \quad (1.146)$$

Durch Vertauschen der Indizes 2 und 3 findet man den entsprechenden Faktor für die x_3 -Achse. Dieser Faktor ist am wandnahen Eckknoten gerade gleich 2 und fällt dann rasch zur Symmetrielinie auf 1 ab. Überträgt man diese Korrektur auf die in dieser Arbeit verwendete Methode, so muß die Wandwirbelviskosität bei der Integration der axialen Impulsbilanz durch den Faktor F_P dividiert werden, während der Produktionsterm mit F_P multipliziert werden muß

$$\mu_w^* = \frac{1}{F_P} \mu_w \quad P_k = F_P \mu_w \left(\frac{U_c}{y_c} \right)^2, \quad (1.147)$$

wobei μ_w die noch nicht korrigierte Wandwirbelviskosität ist.

B Abbildungen zu Kapitel 2

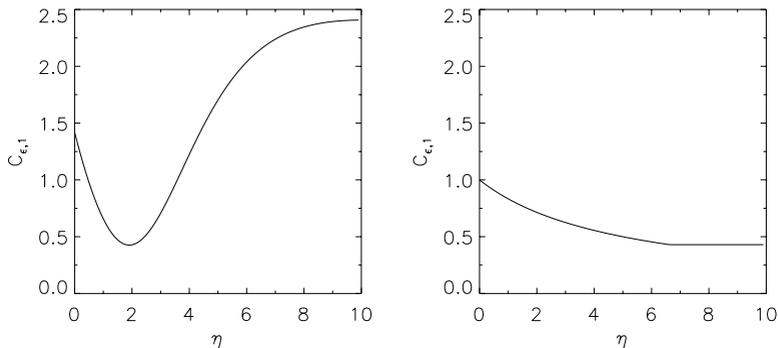


Abbildung 2.1: Abhängigkeit des Koeffizienten $C_{\epsilon,1}$ von η .
(links: RNG; rechts: NKE)

C Abbildungen zu Kapitel 3

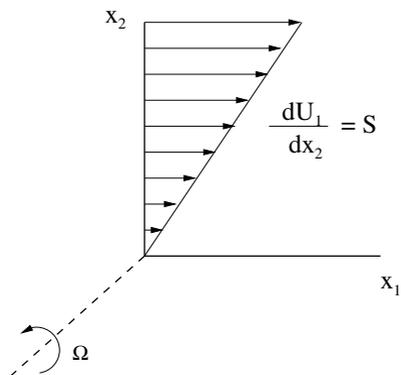


Abbildung 3.2: Rotierende homogene Scherströmung.

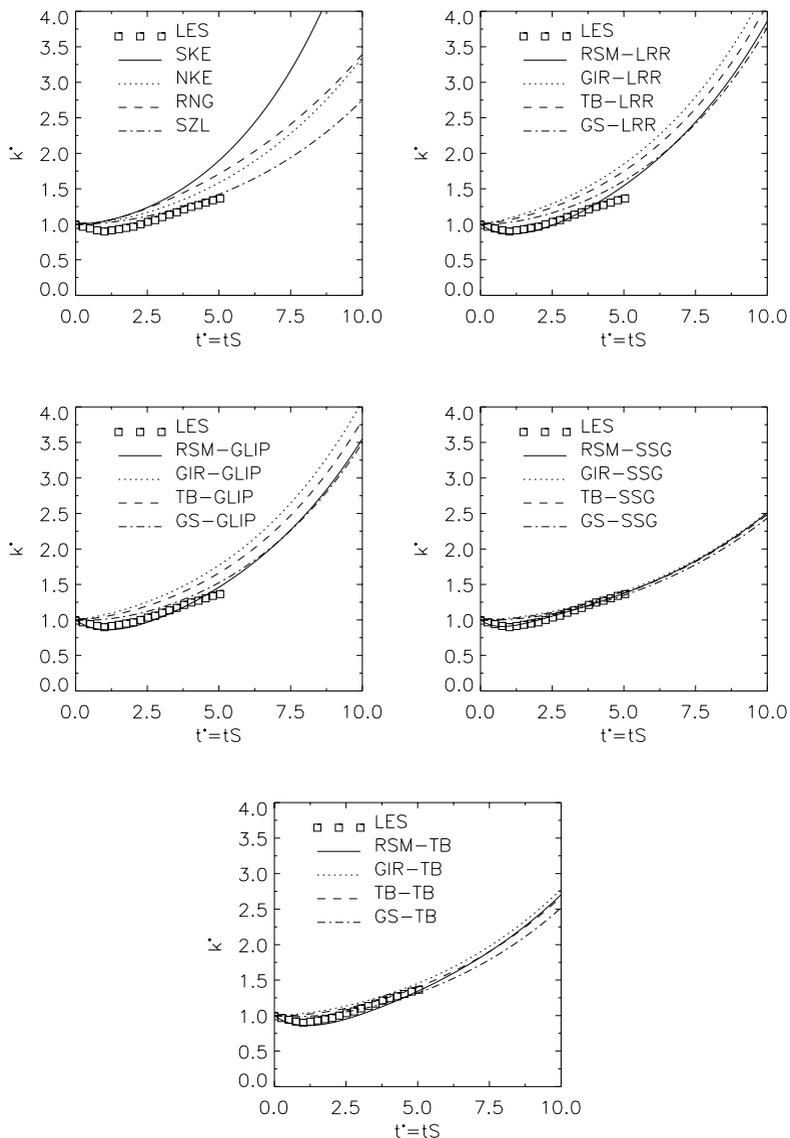


Abbildung 3.3: Evolution der Turbulenzenergie für $\Omega/S = 0$.

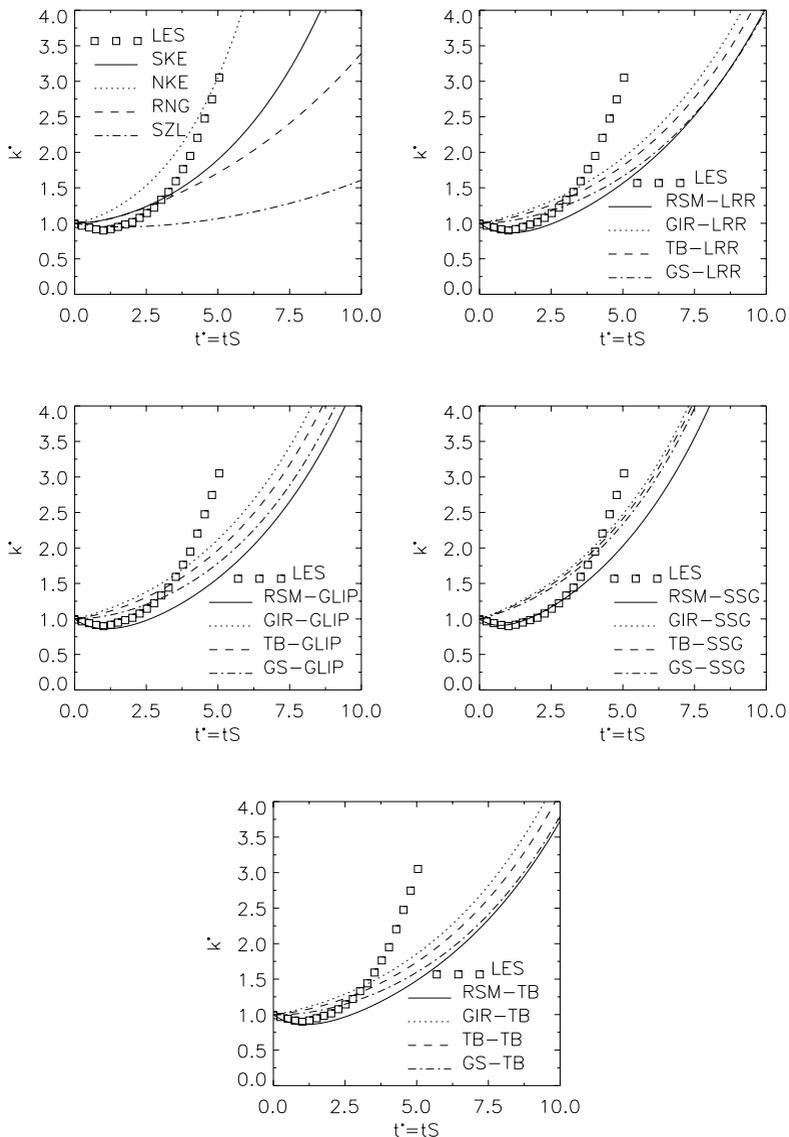


Abbildung 3.4: Evolution der Turbulenzenergie für $\Omega/S = 0.25$.

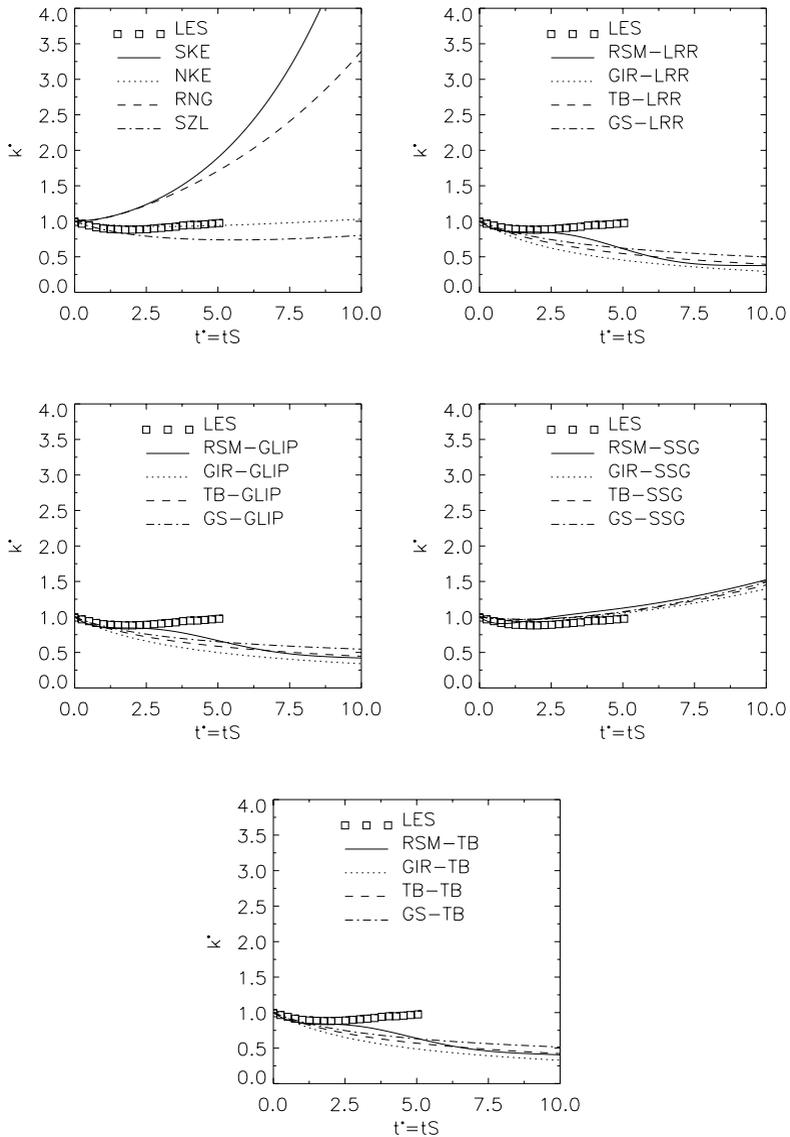


Abbildung 3.5: Evolution der Turbulenzenergie für $\Omega/S = 0.5$.

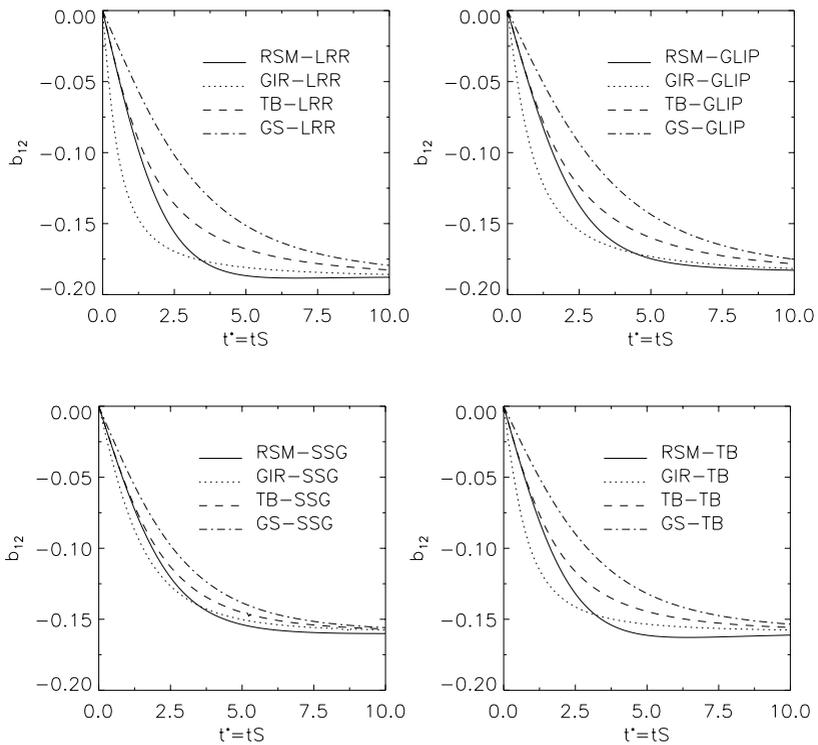


Abbildung 3.6: Asymptotisches Verhalten des Anisotropiefaktors b_{12} .

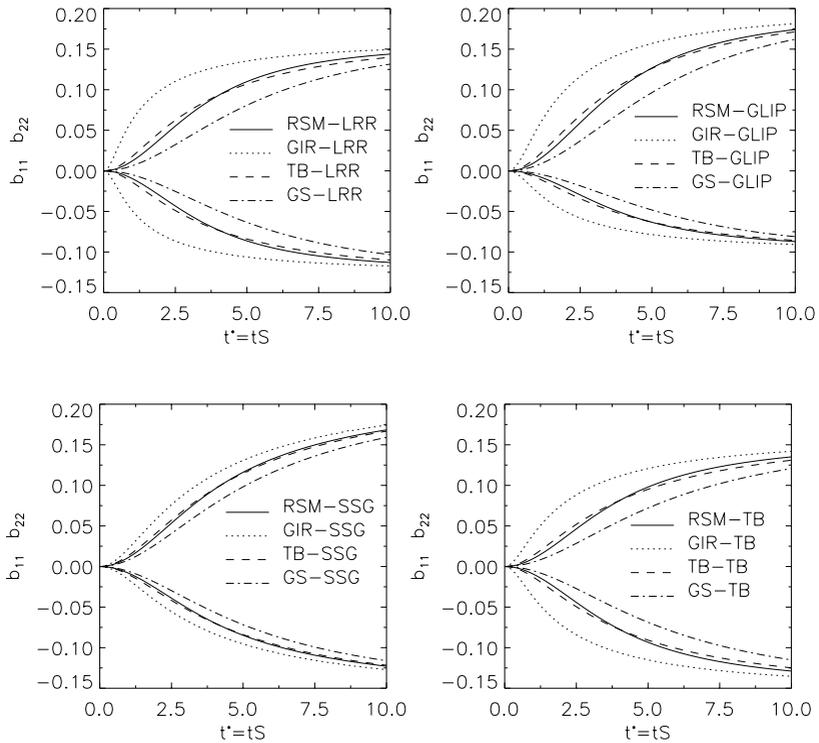


Abbildung 3.7: Asymptotisches Verhalten der Anisotropiefaktoren b_{11} und b_{22} .

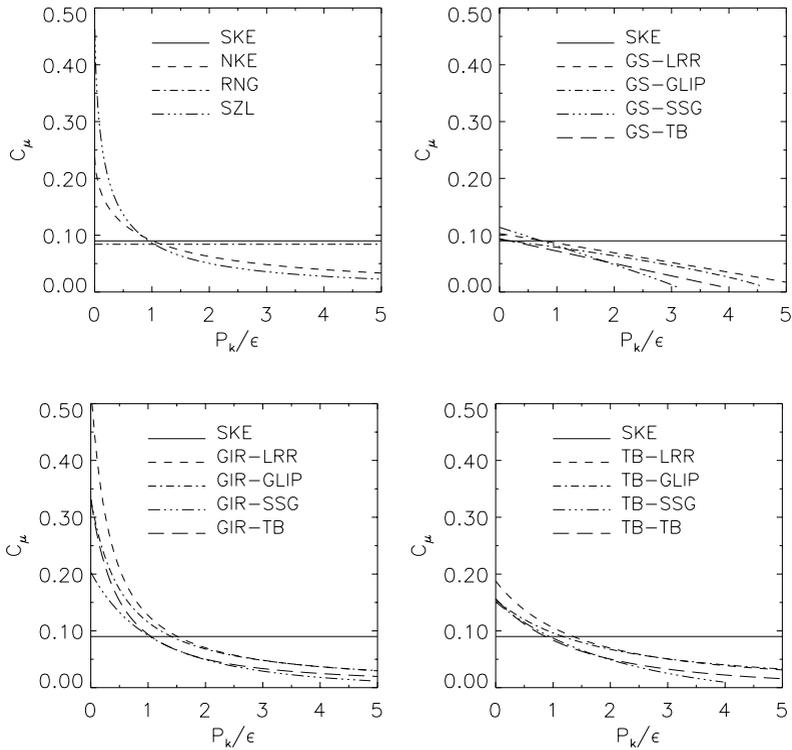


Abbildung 3.8: C_μ in Abhängigkeit von P_k/ϵ für verschiedene Modelle.

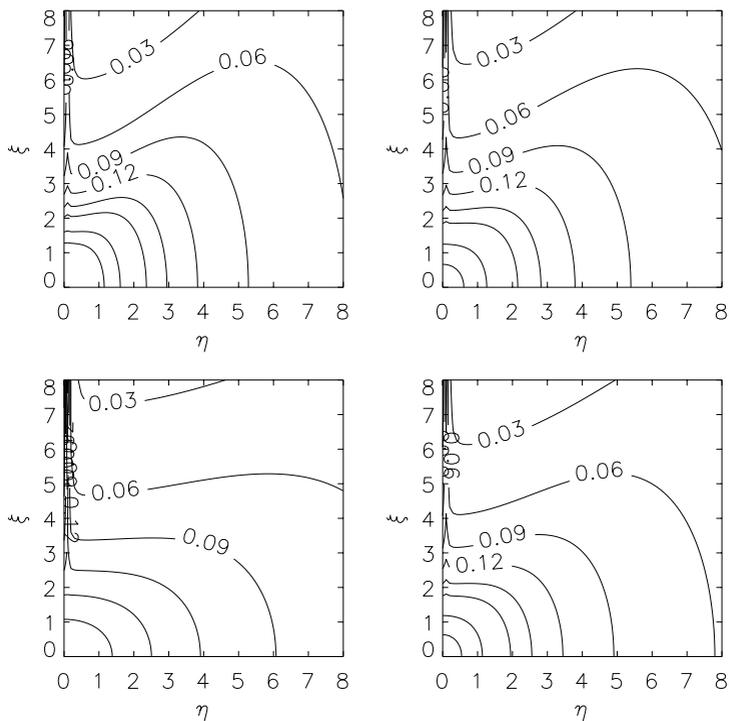


Abbildung 3.9: C_μ in Abhängigkeit von η und ξ nach dem Modell von GIRIMAJI. (oben: LRR und GLIP; unten: SSG und TB)

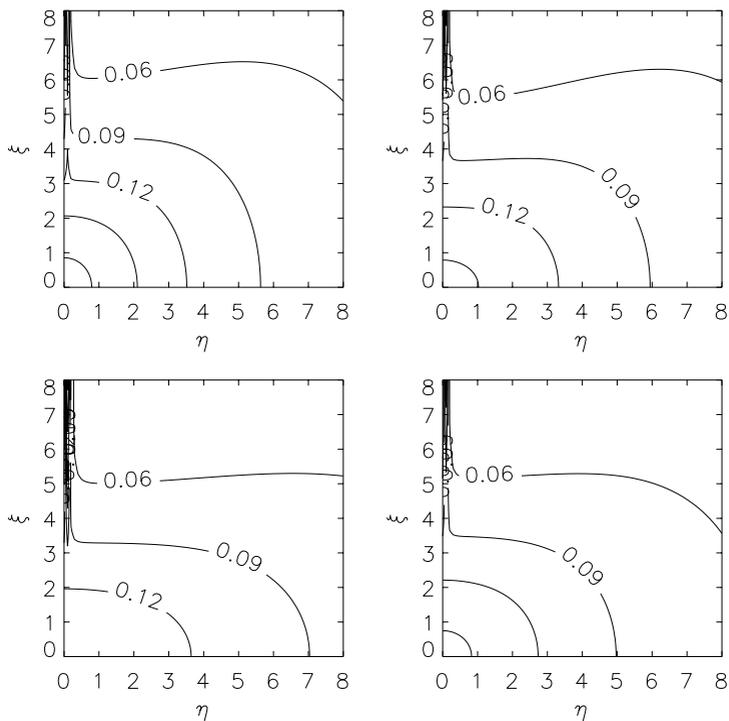


Abbildung 3.10: C_μ in Abhängigkeit von η und ξ nach dem Modell von TAULBEE. (oben: LRR und GLIP; unten: SSG und TB)

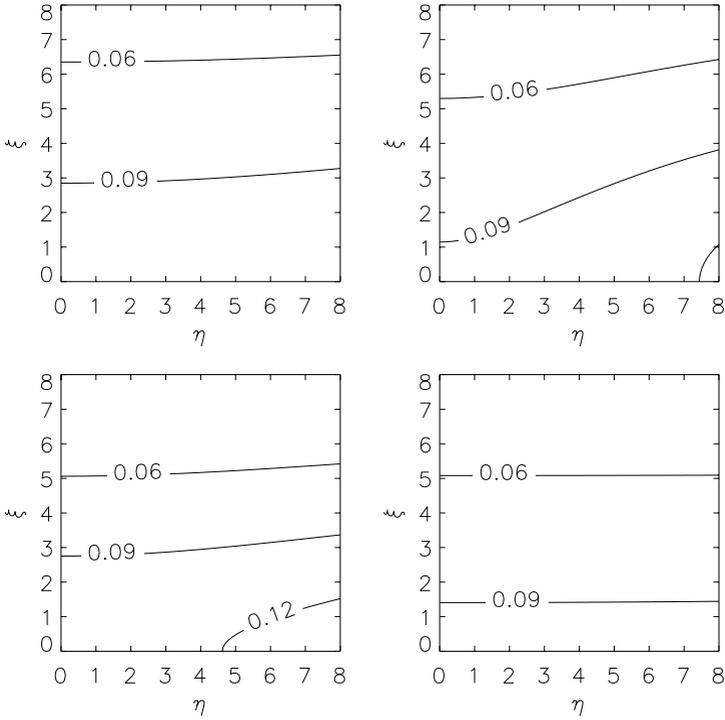


Abbildung 3.11: C_μ in Abhängigkeit von η und ξ nach dem Modell von GATSKI und SPEZIALE. (oben: LRR und GLIP; unten: SSG und TB)

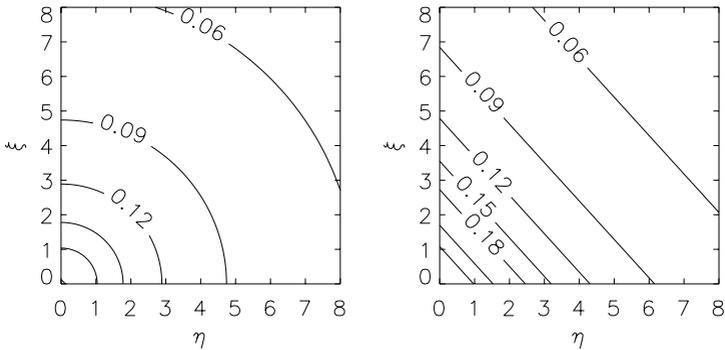


Abbildung 3.12: C_μ in Abhängigkeit von η und ξ nach dem NKE (links) und SZL-Modell (rechts).

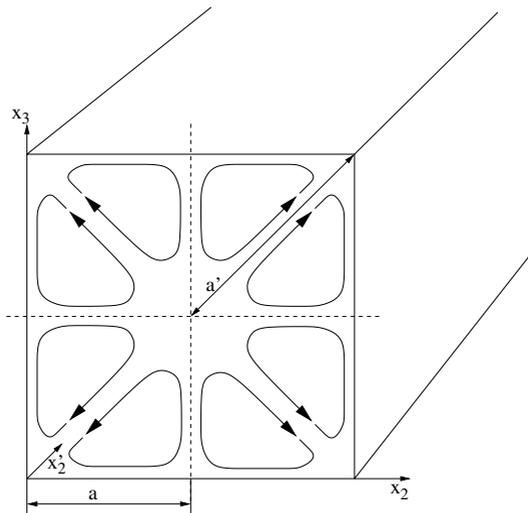


Abbildung 3.13: Geometrie des quadratischen Kanals.

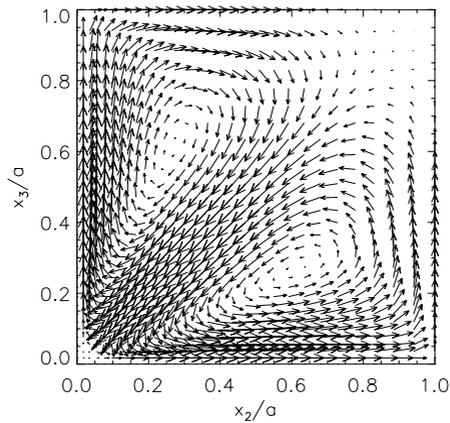


Abbildung 3.14: Sekundärströmungswirbel in einem Quadranten (GIR-TB-Modell).

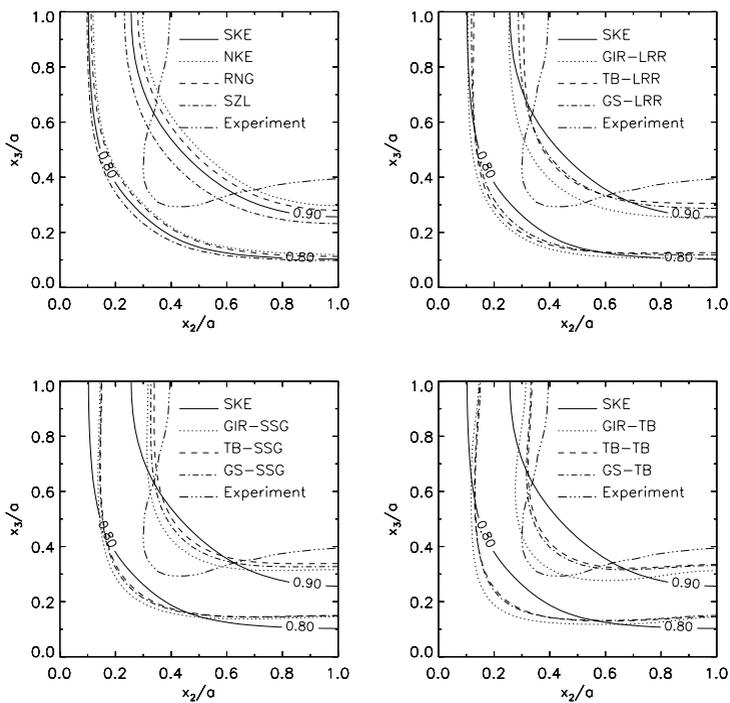


Abbildung 3.15: Höhenlinien der axialen Geschwindigkeitskomponente U/U_{\max} in einem Quadranten.

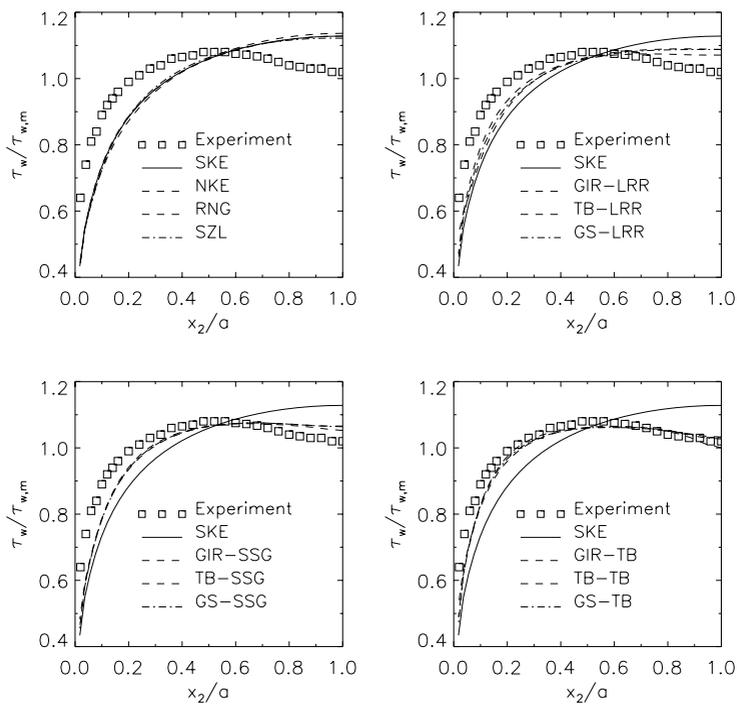


Abbildung 3.16: Wandschubspannungsverteilung im quadratischen Kanal.

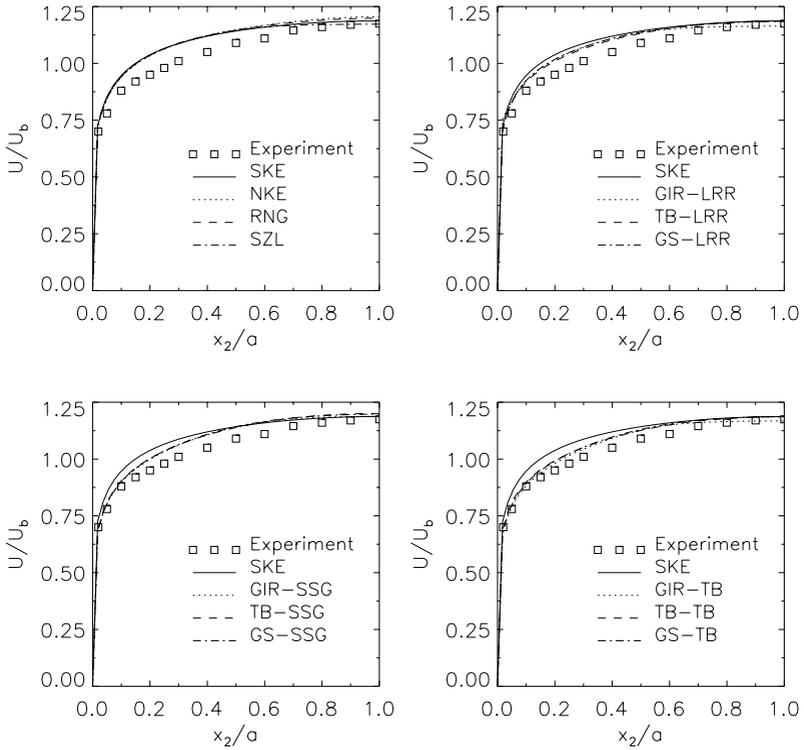


Abbildung 3.17: Geschwindigkeitsverteilung auf der Symmetrielinie.

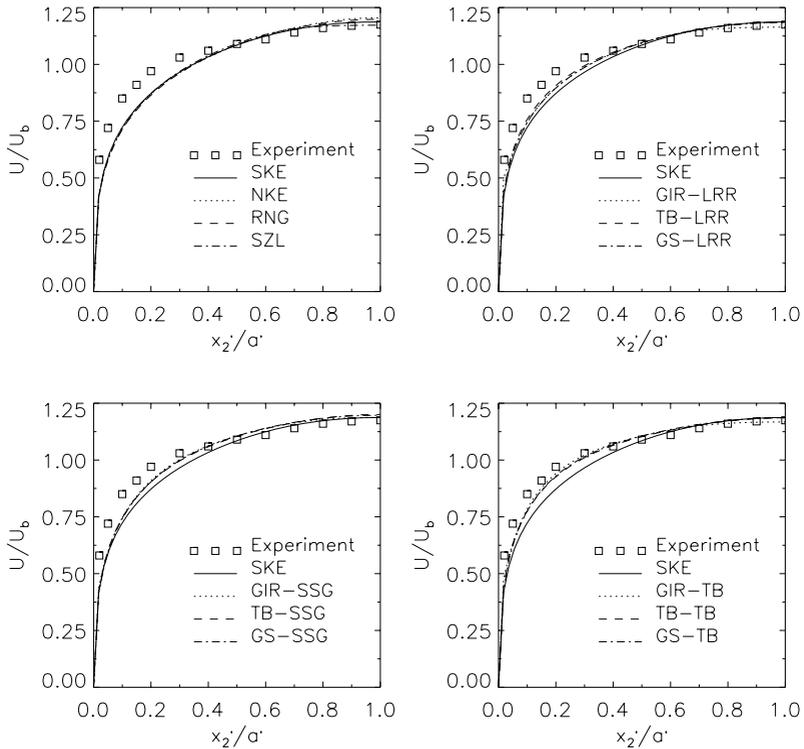


Abbildung 3.18: Geschwindigkeitsverteilung auf der Diagonalen.

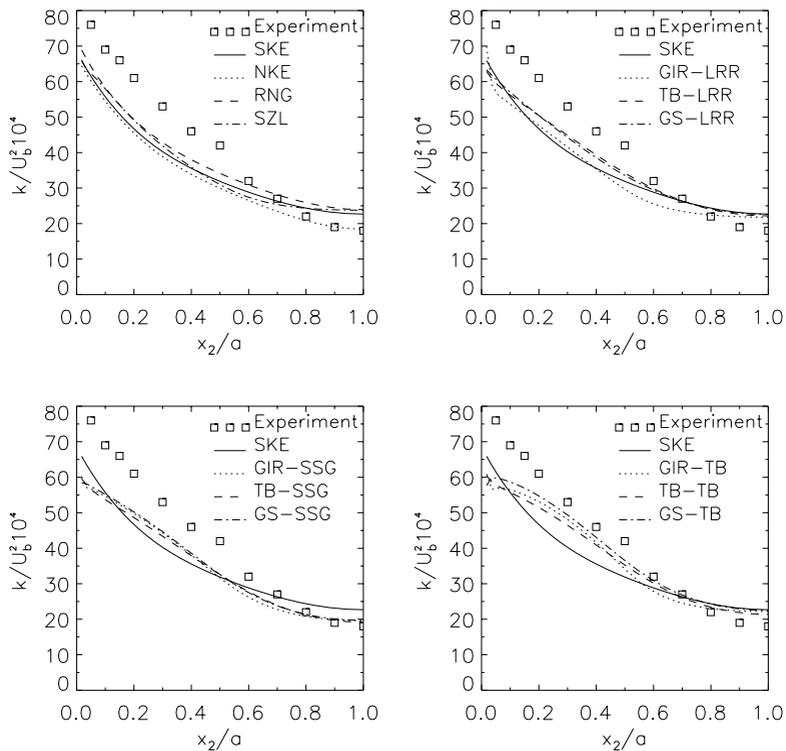


Abbildung 3.19: Turbulenzenergieverteilung auf der Symmetrielinie.

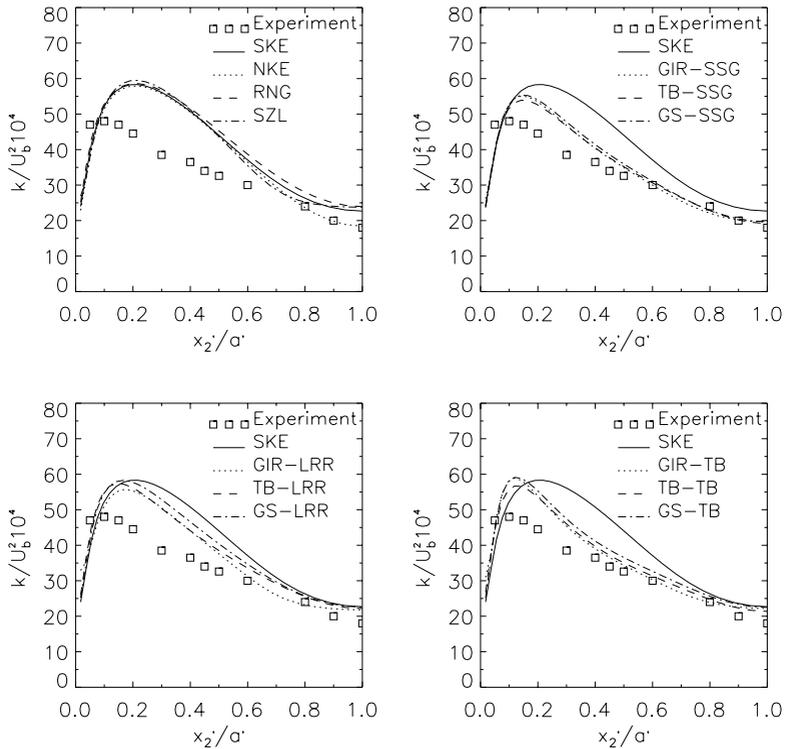


Abbildung 3.20: Turbulenzenergieverteilung auf der Diagonalen.

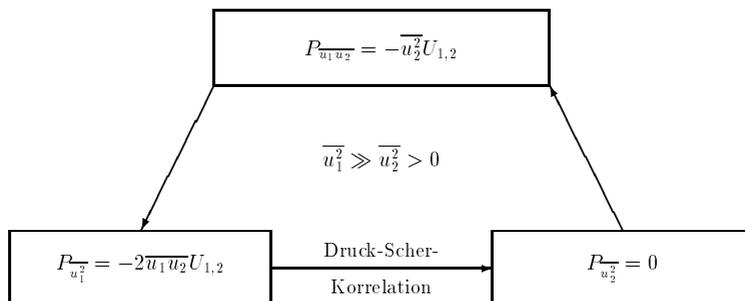


Abbildung 3.21: Kopplung der turbulenten Spannungen in einer ebenen Scherströmung

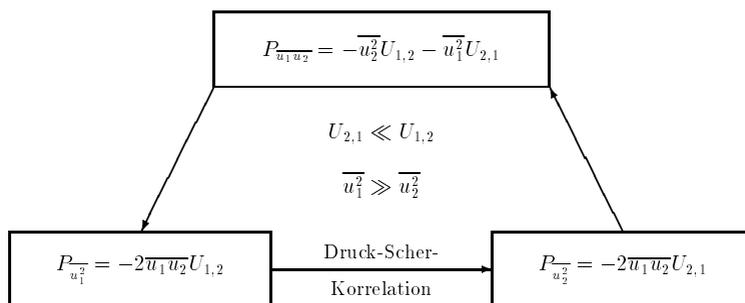


Abbildung 3.22: Kopplung der turbulenten Spannungen in einer leicht gekrümmten ebenen Scherströmung.

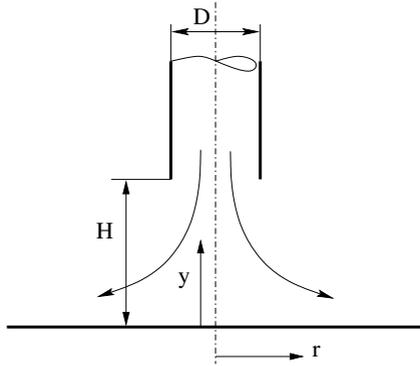


Abbildung 3.23: Geometrie der Staupunktströmung.

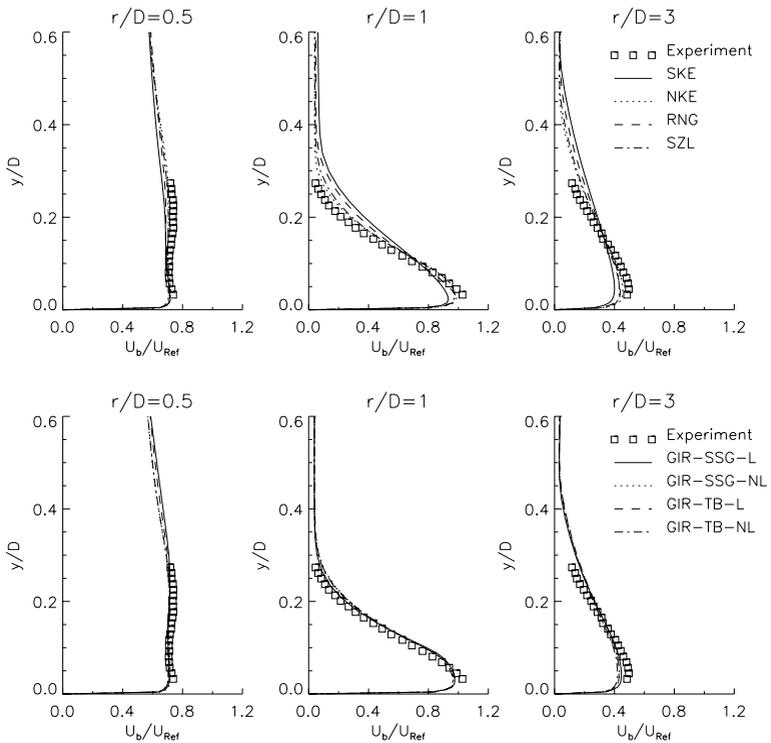


Abbildung 3.24: Geschwindigkeitsprofil im Radialstrahl.

$$(U_b = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}, \text{ lineare und nichtlineare Modelle}).$$

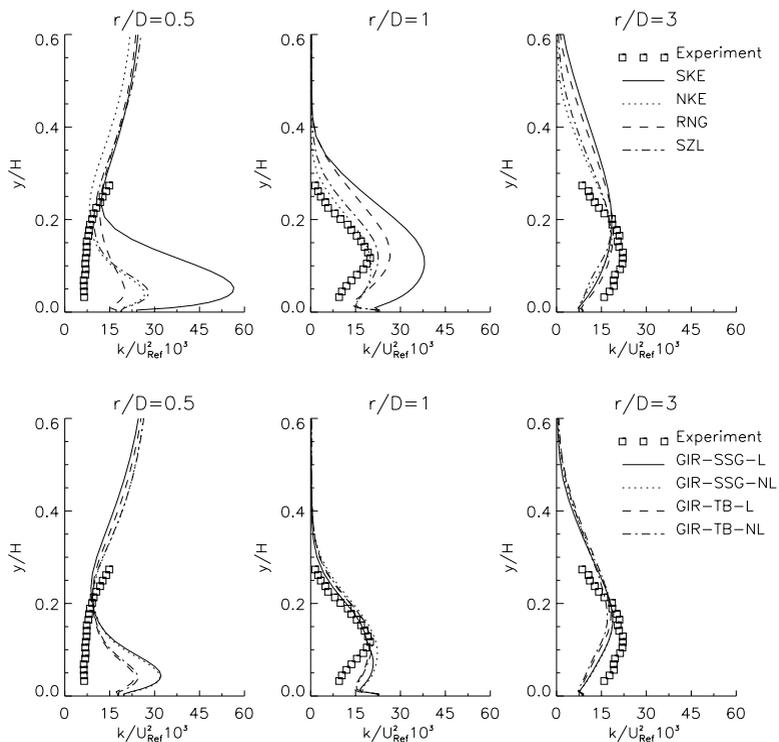


Abbildung 3.25: Verteilung der Turbulenzenergie im Radialstrahl.
(lineare und nichtlineare Modelle).

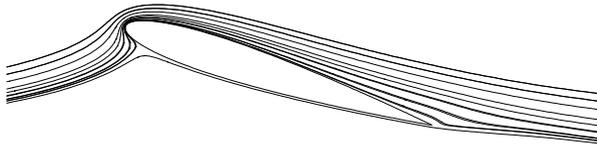


Abbildung 3.26: Umströmung des NACA 0012 Tragflügels. (SKE)

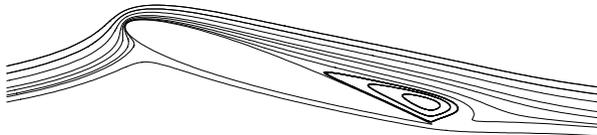


Abbildung 3.27: Umströmung des NACA 0012 Tragflügels. (NKE)

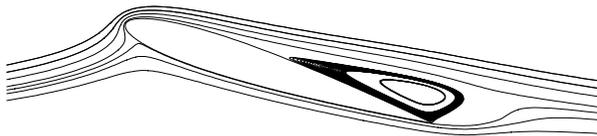


Abbildung 3.28: Umströmung des NACA 0012 Tragflügels. (GIR-TB)

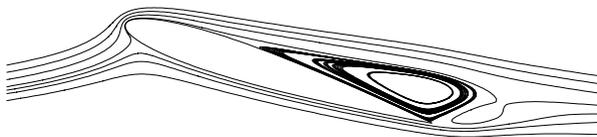


Abbildung 3.29: Umströmung des NACA 0012 Tragflügels. (SZL)

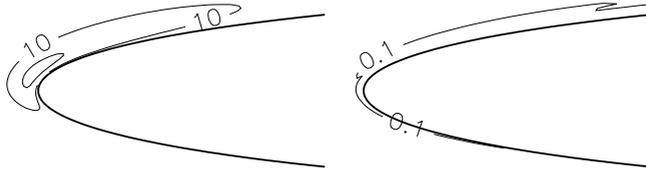


Abbildung 3.30: Höhenlinien der Turbulenzenergie $100k/U_{\text{Ref}}^2$ an der Nase des NACA 0012 Tragflügels. (links: SKE-Modell; rechts: NKE-Modell)

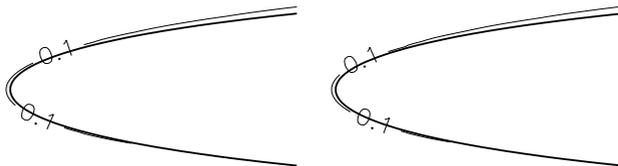


Abbildung 3.31: Höhenlinien der Turbulenzenergie $100k/U_{\text{Ref}}^2$ an der Nase des NACA 0012 Tragflügels. (links: GIR-TB-Modell; rechts: SZL-Modell)

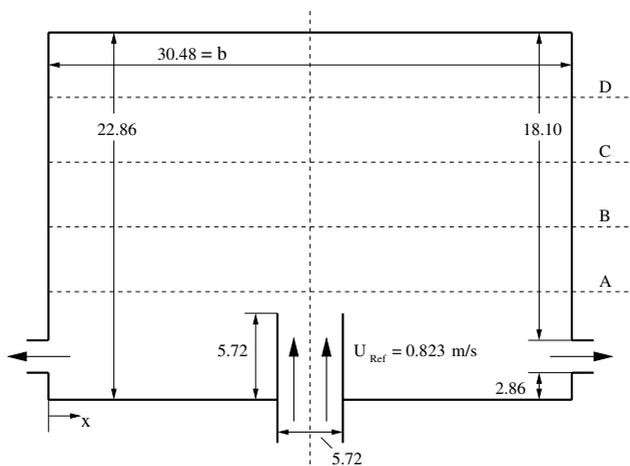


Abbildung 3.32: Geometrie der rezirkulierenden Raumströmung.
Alle Maßangaben in cm.

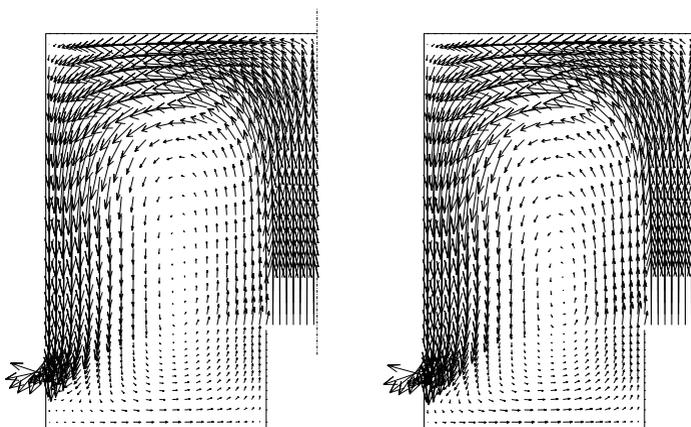


Abbildung 3.33: Vektordarstellung des Geschwindigkeitsfeldes.
(links: SKE; rechts: GIR-SSG)

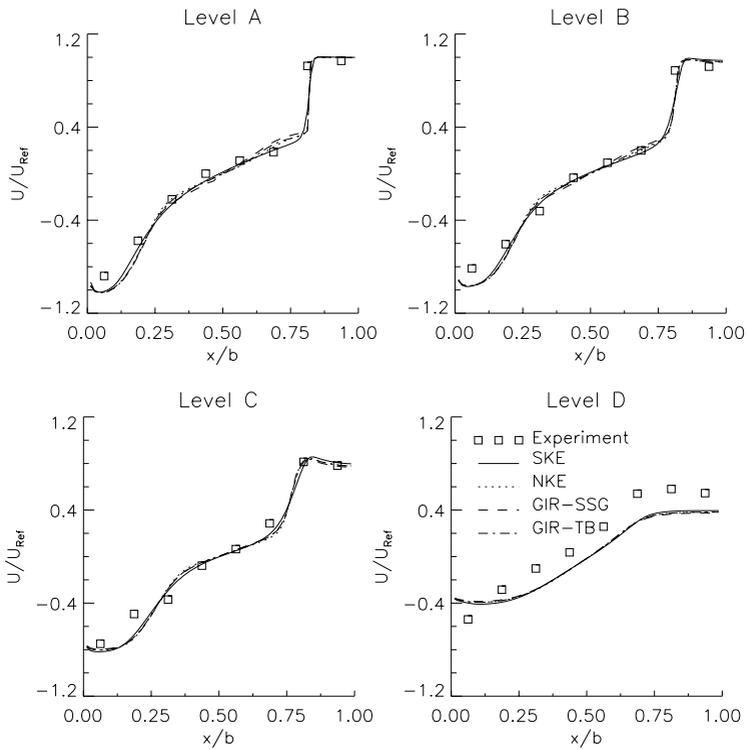


Abbildung 3.34: Geschwindigkeitsverteilung der rezirkulierenden Raumströmung.

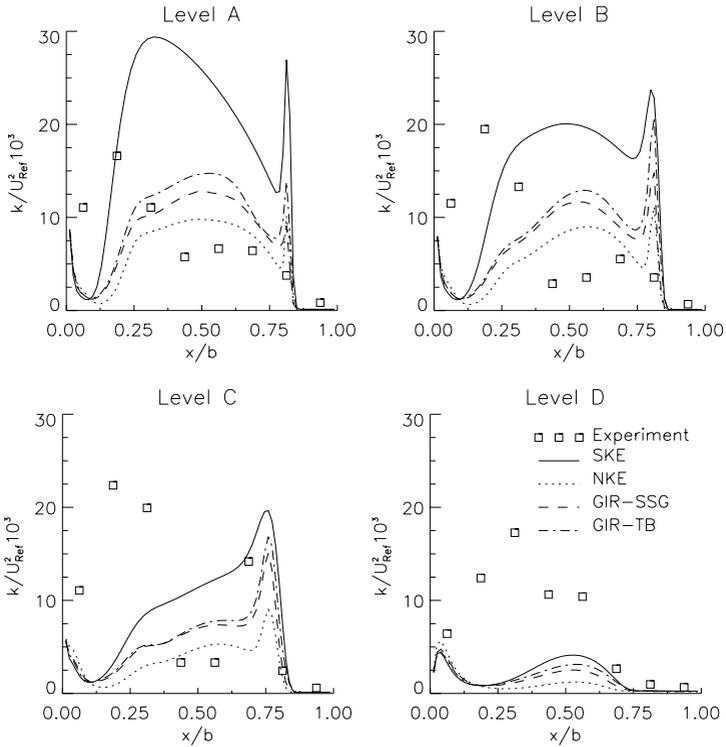


Abbildung 3.35: Turbulenzenergieverteilung der rezirkulierenden Raumströmung.

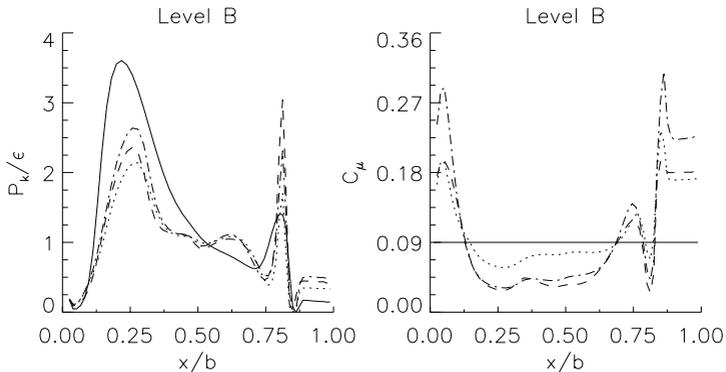


Abbildung 3.36: P_k/ϵ - und C_{μ} -Verteilung in der rezirkulierenden Raumströmung.

D Abbildungen zu Kapitel 4

D.1 Ergebnisse der Strömung über eine zurückspringende Stufe

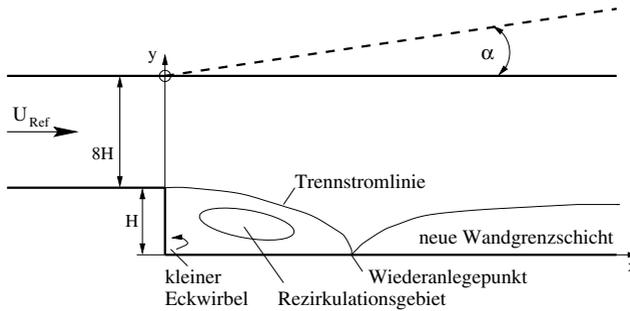


Abbildung 4.37: Geometrie der zurückspringenden Stufe.

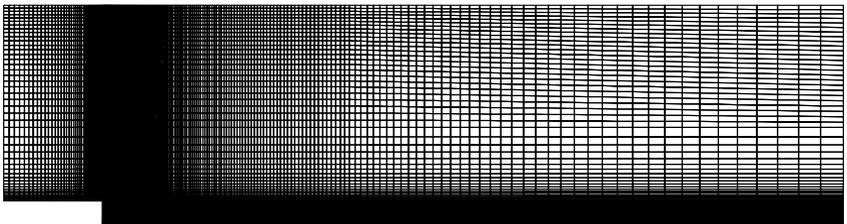


Abbildung 4.38: Darstellung des 180×80 -Netzes.

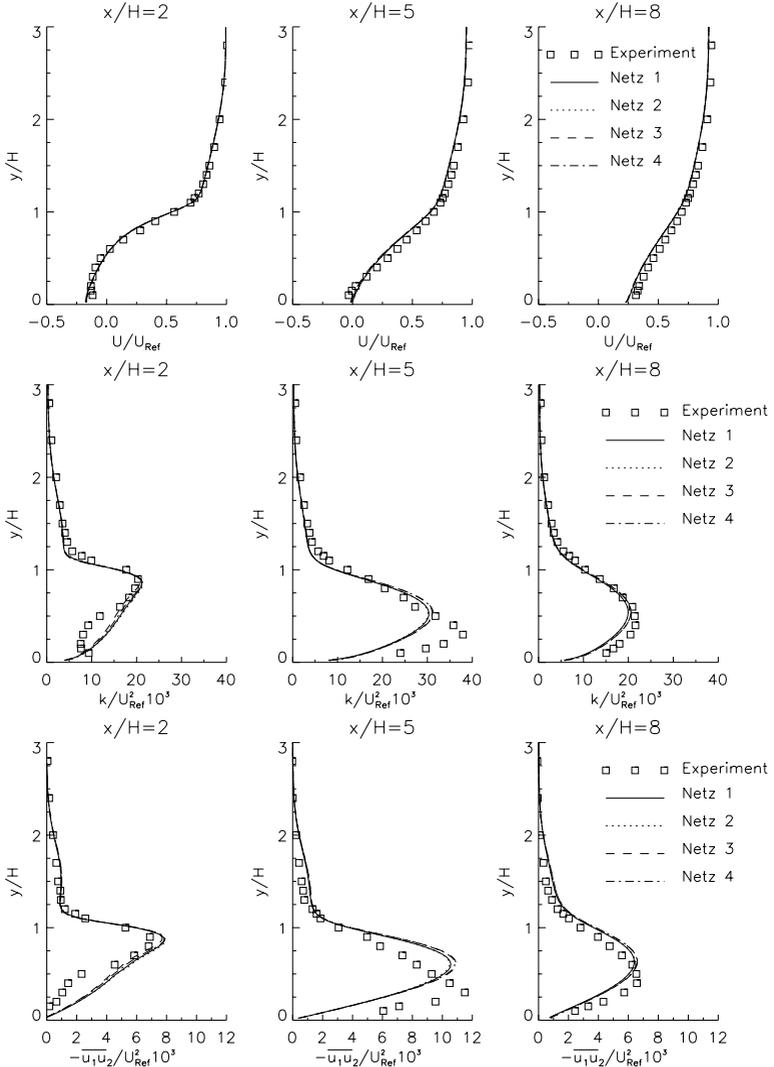


Abbildung 4.39: Profile der Geschwindigkeit, der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannungen für verschiedene Netze berechnet mit dem SKE-Modell. ($\alpha = 0^\circ$)

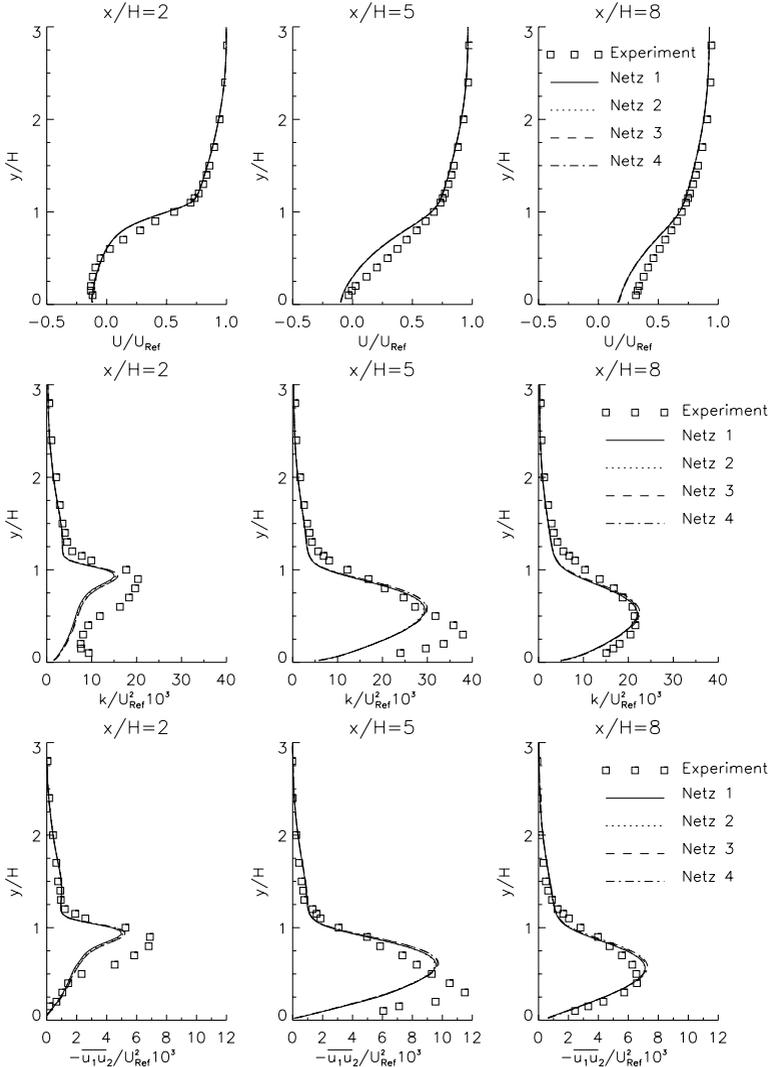


Abbildung 4.40: Profile der Geschwindigkeit, der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannungen für verschiedene Netze berechnet mit dem NKE-Modell. ($\alpha = 0^\circ$)

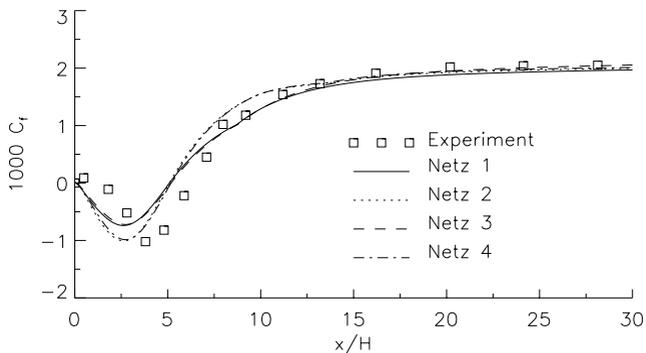


Abbildung 4.41: C_f -Verteilung an der stufenseitigen Wand für verschiedene Netze berechnet mit dem SKE-Modell. ($\alpha = 0^\circ$)

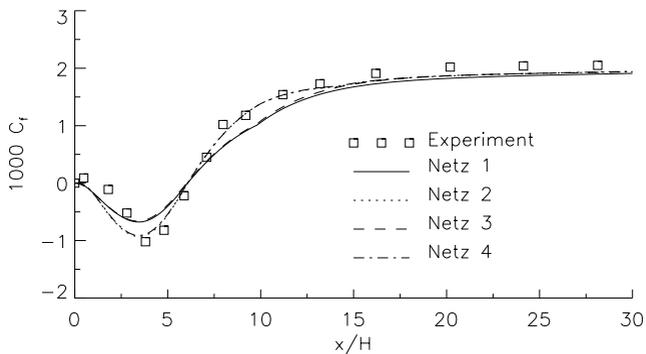
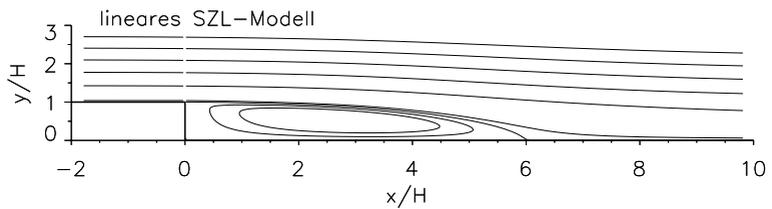
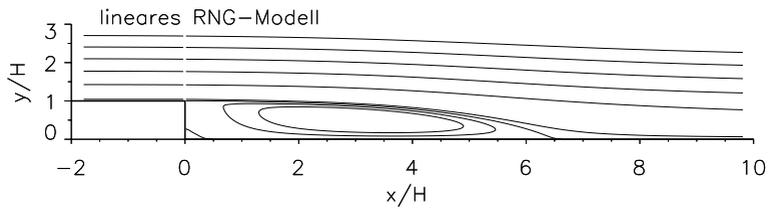
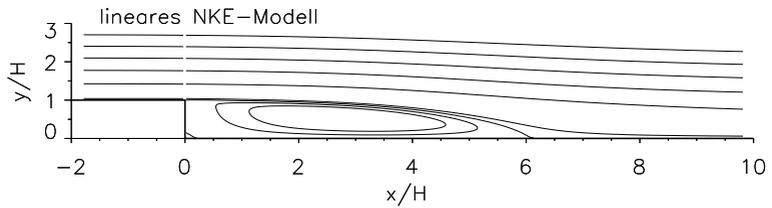
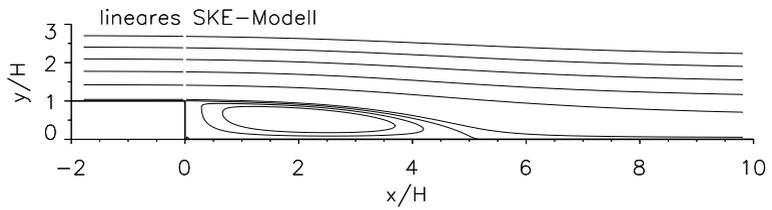


Abbildung 4.42: C_f -Verteilung an der stufenseitigen Wand für verschiedene Netze berechnet mit dem NKE-Modell. ($\alpha = 0^\circ$)



..... Fortsetzung

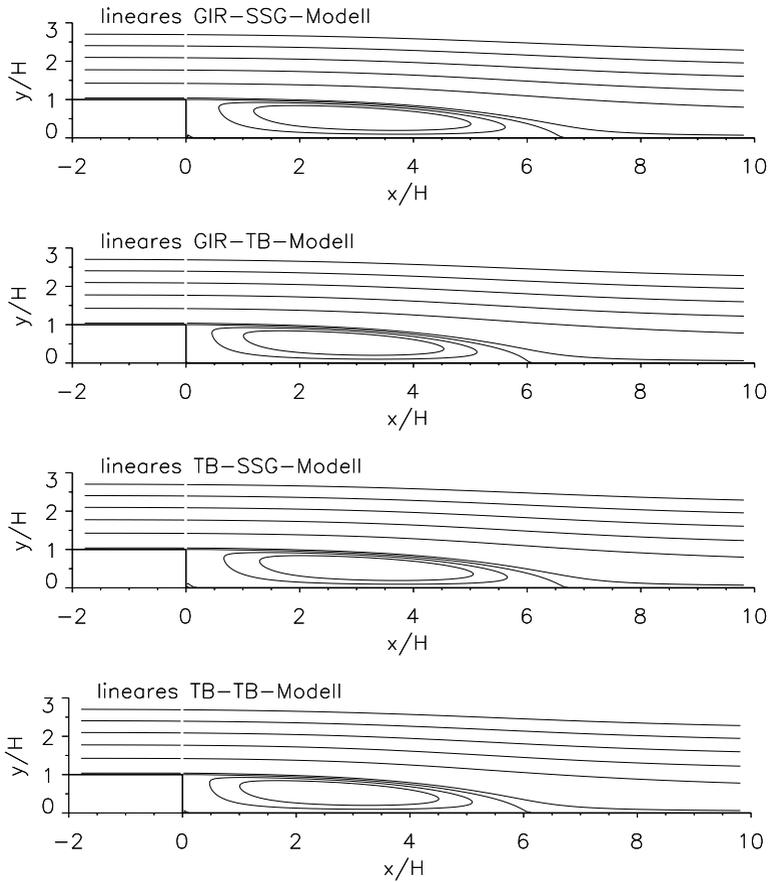
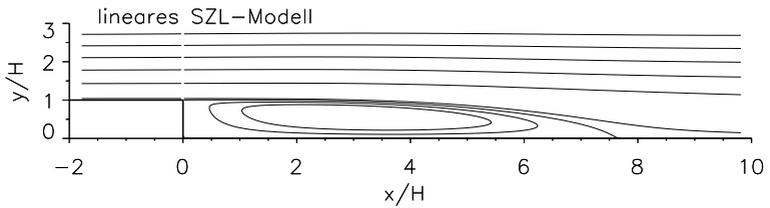
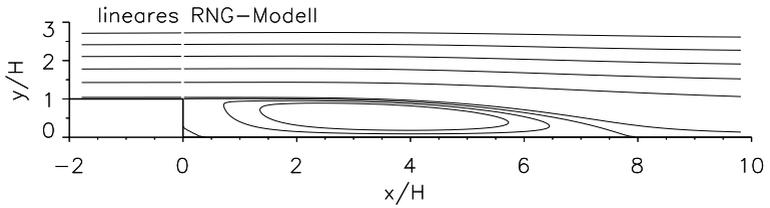
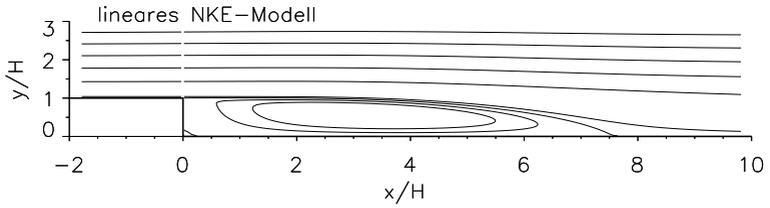
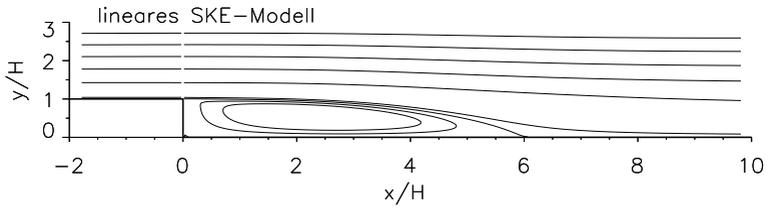


Abbildung 4.43: Stromlinien hinter der zurückspringenden Stufe.
 ($\alpha = 0^\circ$, lineare Modellvarianten)



..... Fortsetzung

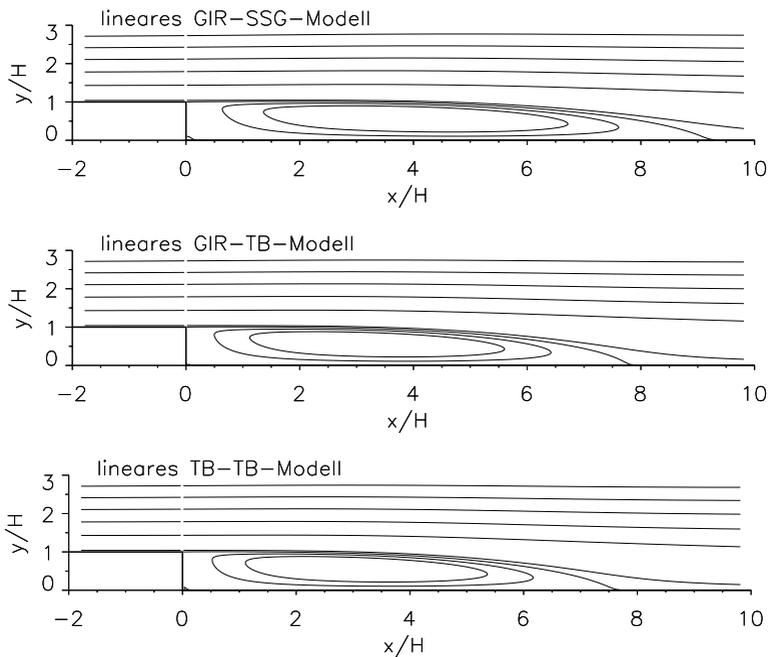


Abbildung 4.44: Stromlinien hinter der zurückspringenden Stufe.
($\alpha = 6^\circ$, lineare Modellvarianten)

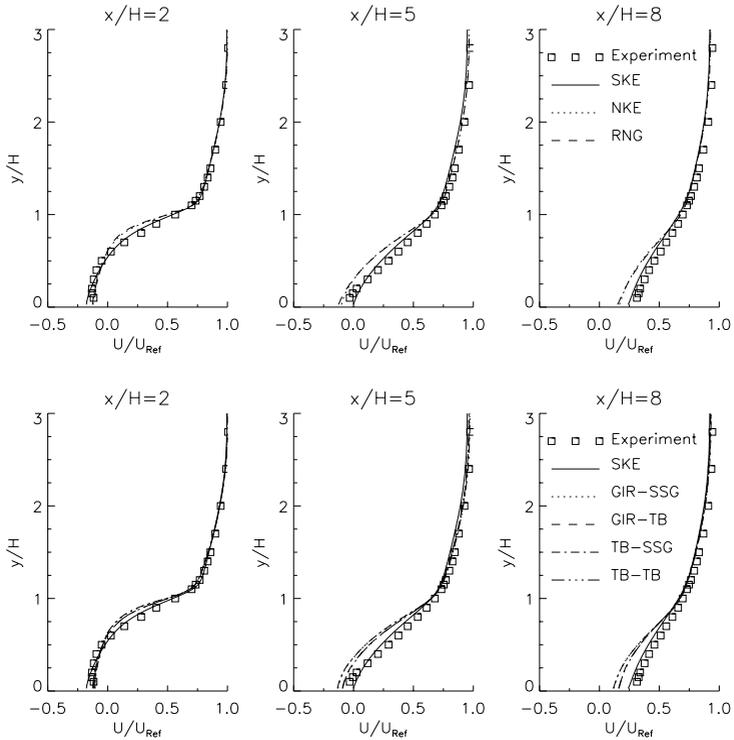


Abbildung 4.45: Geschwindigkeitsverteilung hinter der Stufe.
 ($\alpha = 0^\circ$, lineare Modellvarianten).

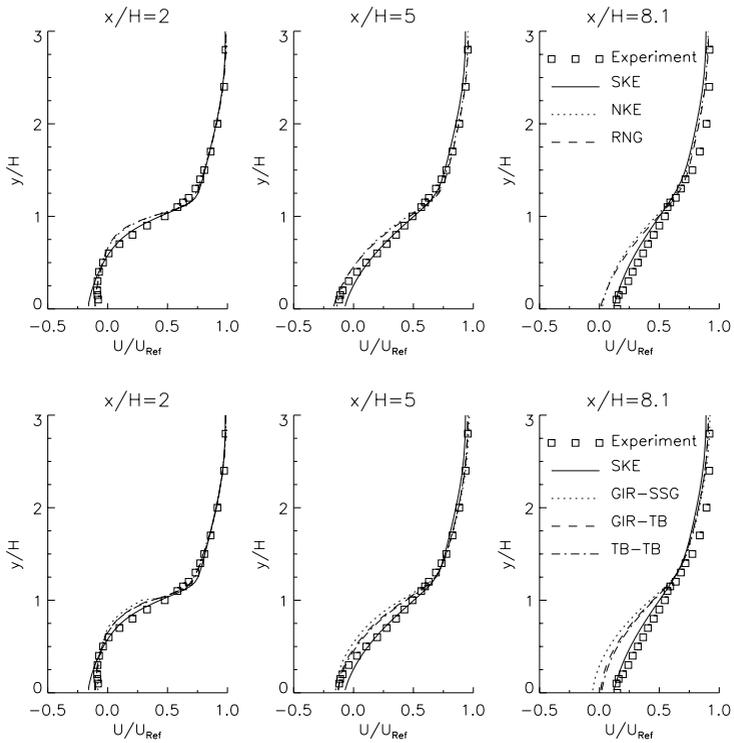


Abbildung 4.46: Geschwindigkeitsverteilung hinter der Stufe.
 ($\alpha = 6^\circ$, lineare Modellvarianten)

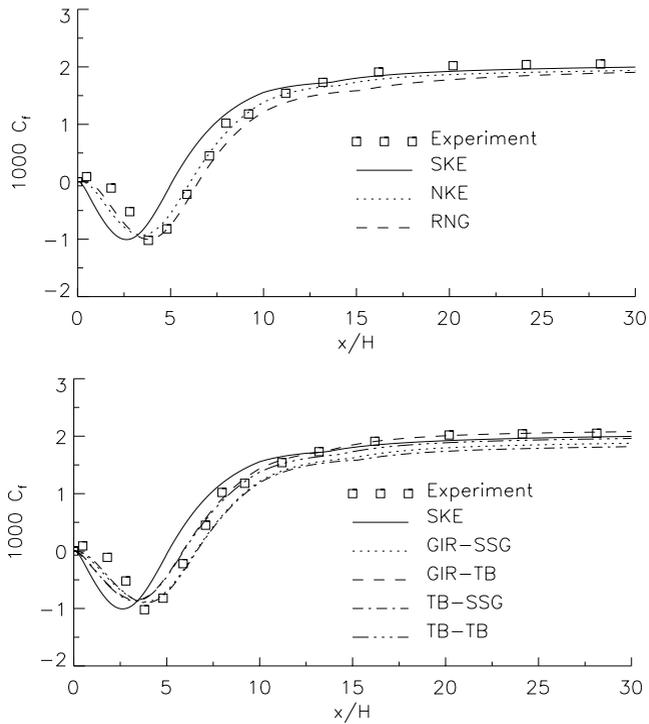


Abbildung 4.47: C_f -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
 ($\alpha = 0^\circ$, lineare Modellvarianten)

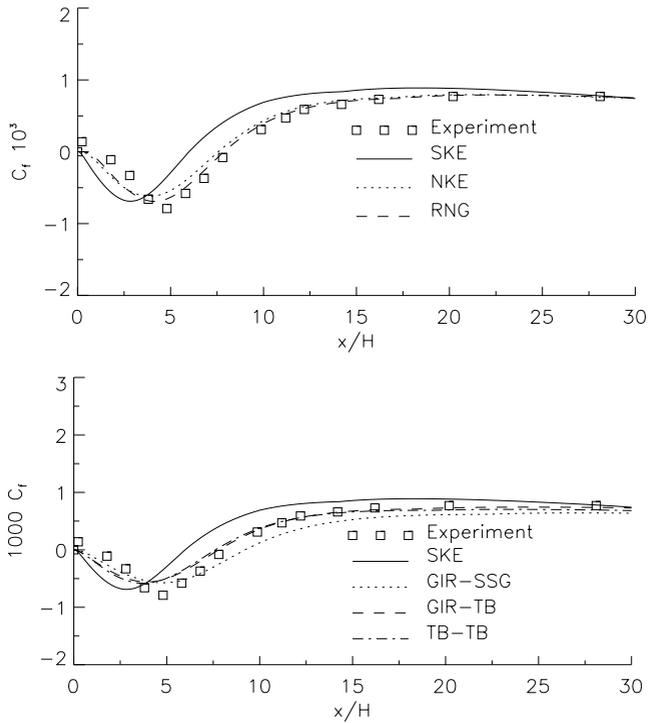


Abbildung 4.48: C_f -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
 ($\alpha = 6^\circ$, lineare Modellvarianten)

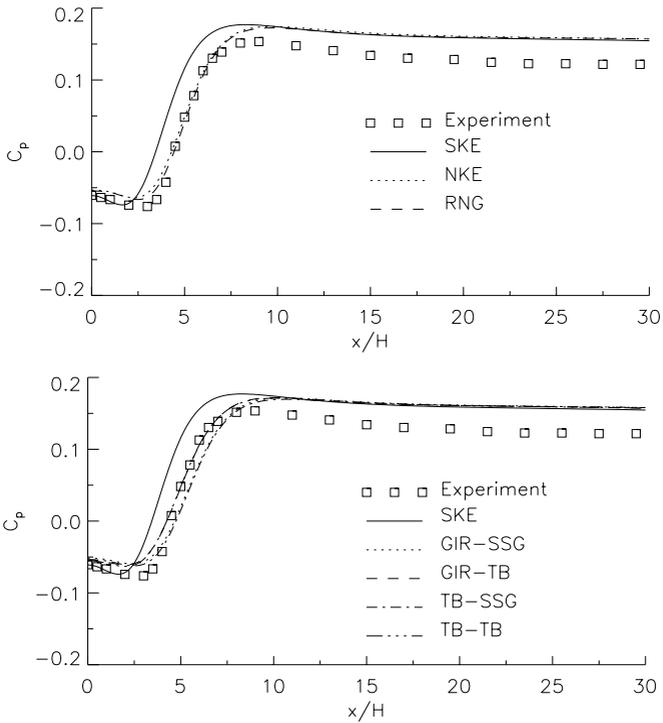


Abbildung 4.49: C_p -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
 ($\alpha = 0^\circ$, lineare Modellvarianten)

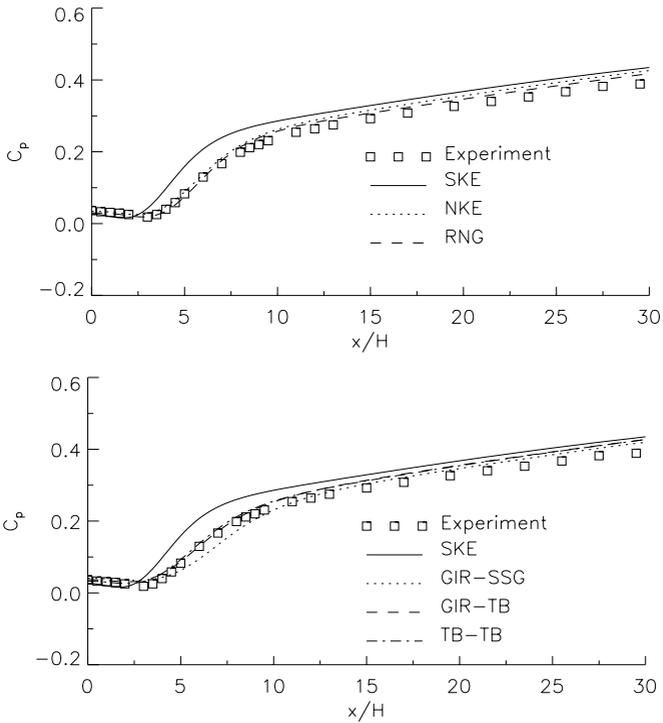


Abbildung 4.50: C_p -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
 ($\alpha = 6^\circ$, lineare Modellvarianten)

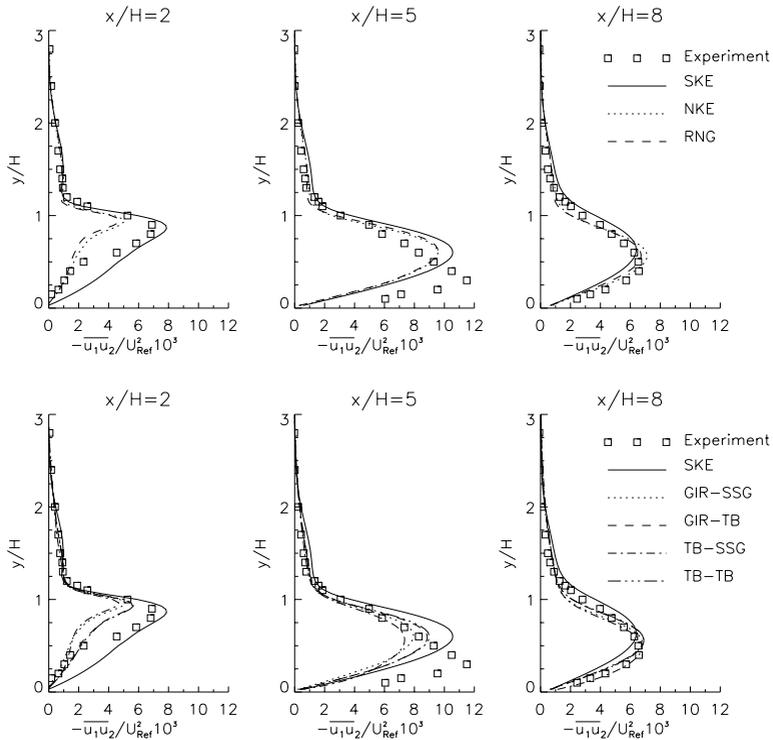


Abbildung 4.51: Profile der turbulenten Schubspannung hinter der Stufe.
 ($\alpha = 0^\circ$, lineare Modellvarianten)

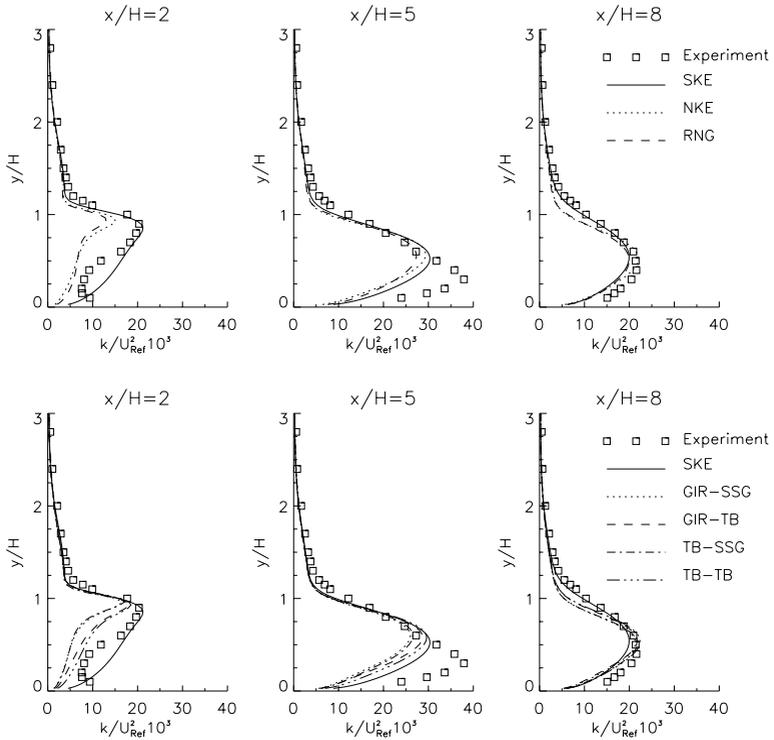


Abbildung 4.52: Turbulenzenergieverteilung, hinter der Stufe.
 ($\alpha = 0^\circ$, lineare Modellvarianten)

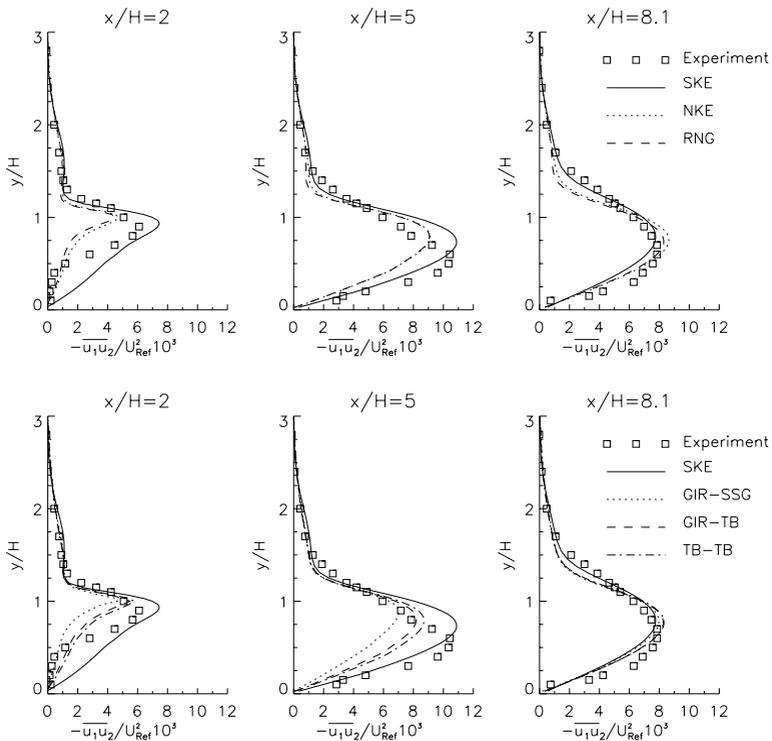


Abbildung 4.53: Verteilung der turbulenten Schubspannung hinter der Stufe. ($\alpha = 6^\circ$, lineare Modellvarianten)

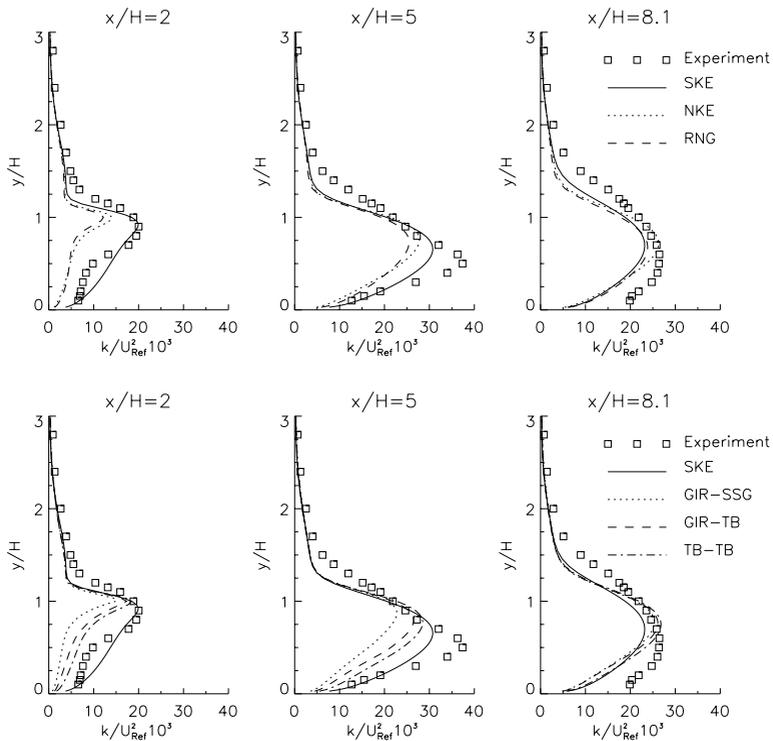


Abbildung 4.54: Turbulenzenergieverteilung hinter der Stufe.
 ($\alpha = 6^\circ$, lineare Modellvarianten)

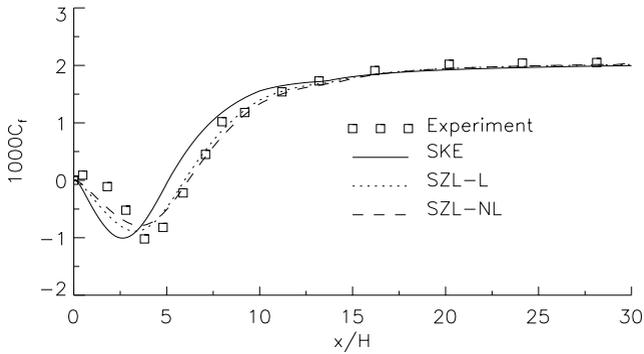


Abbildung 4.55: C_f -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
 ($\alpha = 0^\circ$, lineare und nichtlineare Modellversion)

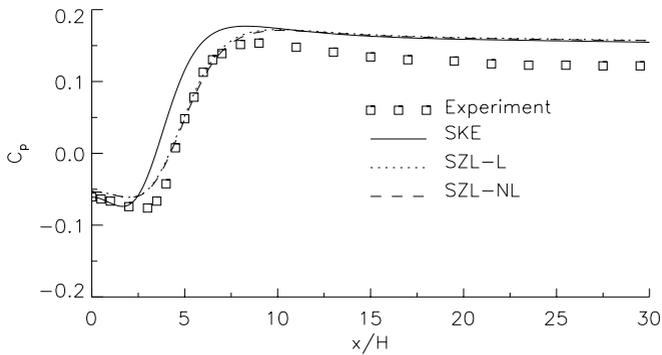


Abbildung 4.56: C_p -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
 ($\alpha = 0^\circ$, lineare und nichtlineare Modellversion)

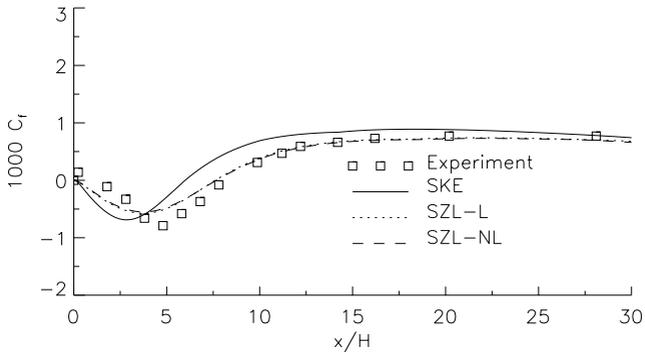


Abbildung 4.57: C_f -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
 $\alpha = 6^\circ$, lineare und nichtlineare Modellversion)

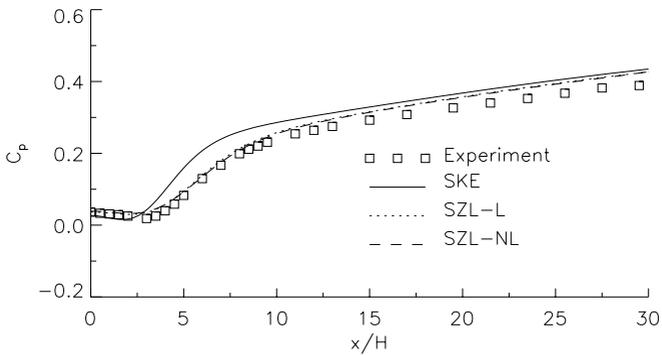


Abbildung 4.58: C_p -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
 $(\alpha = 6^\circ, \text{ lineare und nichtlineare Modellversion})$

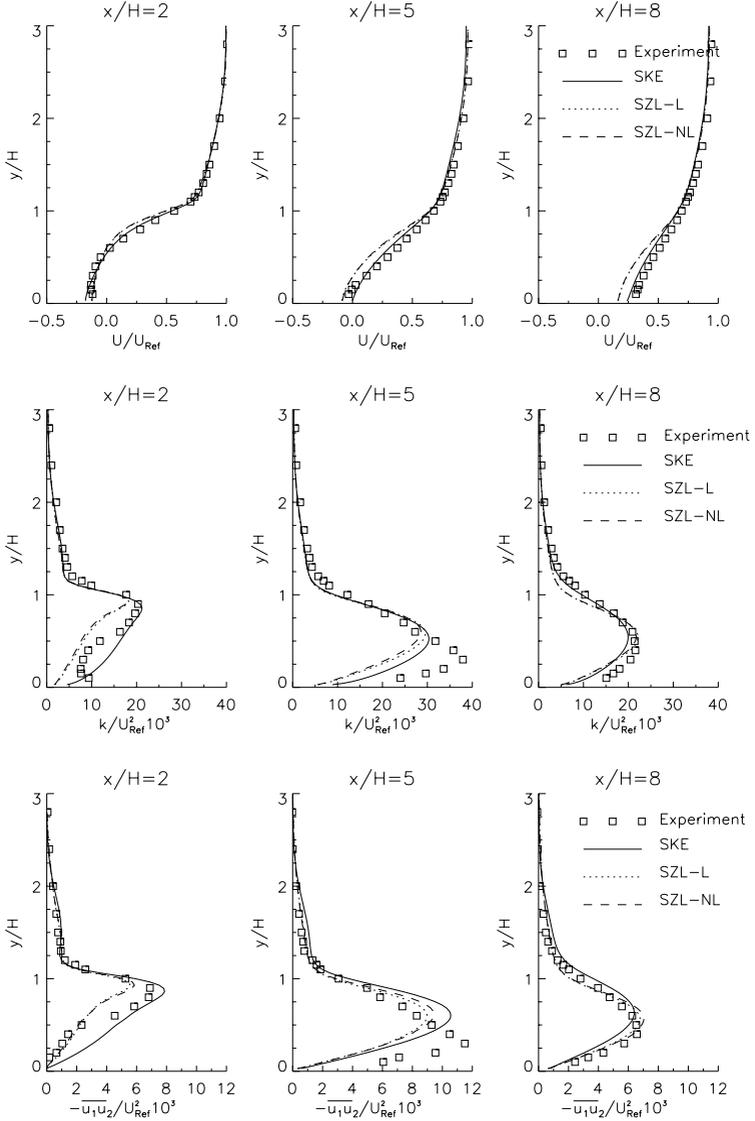


Abbildung 4.59: Profile der Geschwindigkeit, Turbulenzenergie und turbulenten Schubspannung hinter der Stufe. ($\alpha = 0^\circ$, lineare und nichtlineare Modellversion)

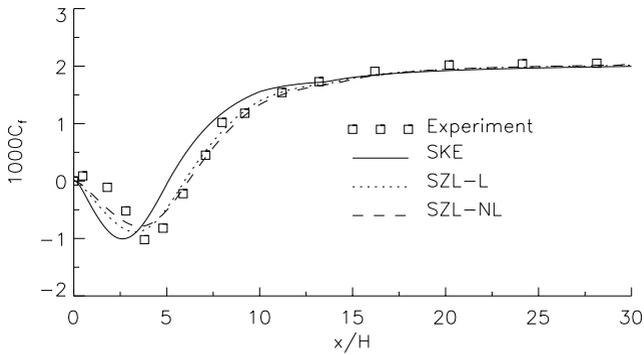


Abbildung 4.60: C_f -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
($\alpha = 0^\circ$, lineare und nichtlineare Modellversion)

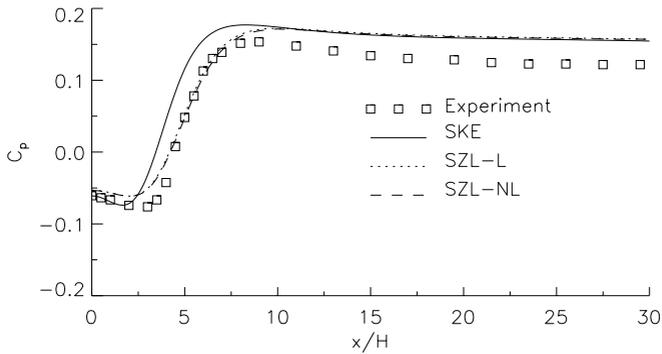


Abbildung 4.61: C_p -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
($\alpha = 0^\circ$, lineare und nichtlineare Modellversion)

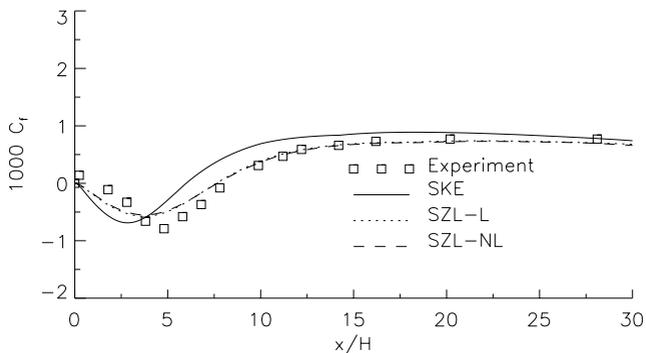


Abbildung 4.62: C_f -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
 $\alpha = 6^\circ$, lineare und nichtlineare Modellversion)

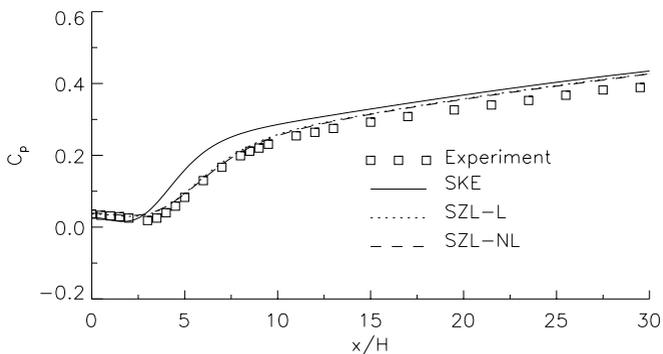


Abbildung 4.63: C_p -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
 $(\alpha = 6^\circ, \text{ lineare und nichtlineare Modellversion})$

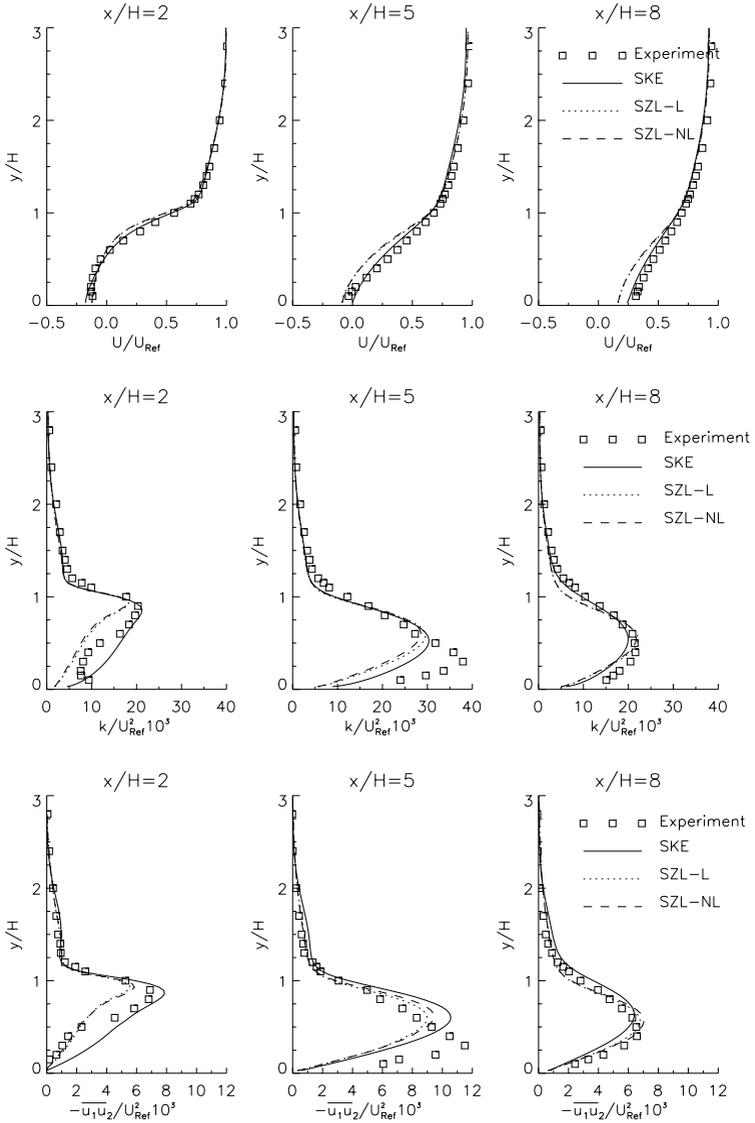


Abbildung 4.64: Profile der Geschwindigkeit, Turbulenzenergie und turbulenten Schubspannung hinter der Stufe. ($\alpha = 0^\circ$, lineare und nichtlineare Modellversion)

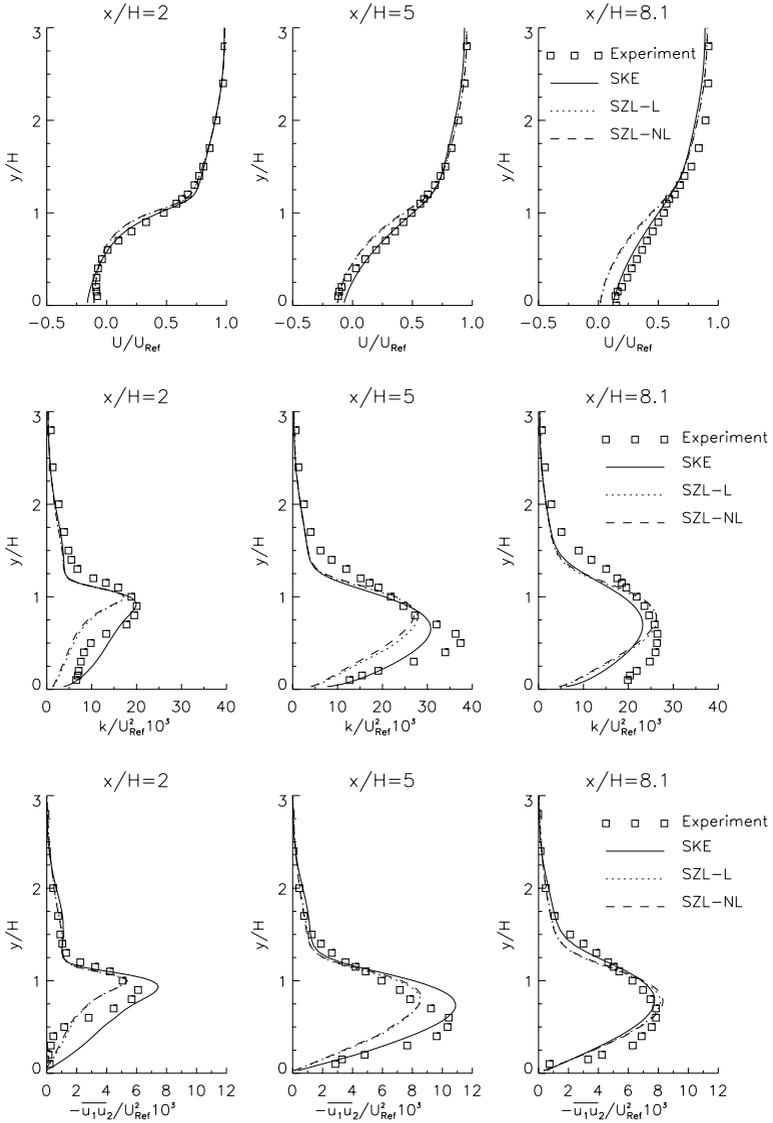


Abbildung 4.65: Profile der Geschwindigkeit, Turbulenzenergie und turbulenten Schubspannung hinter der Stufe. ($\alpha = 6^\circ$, lineare und nichtlineare Modellversion)

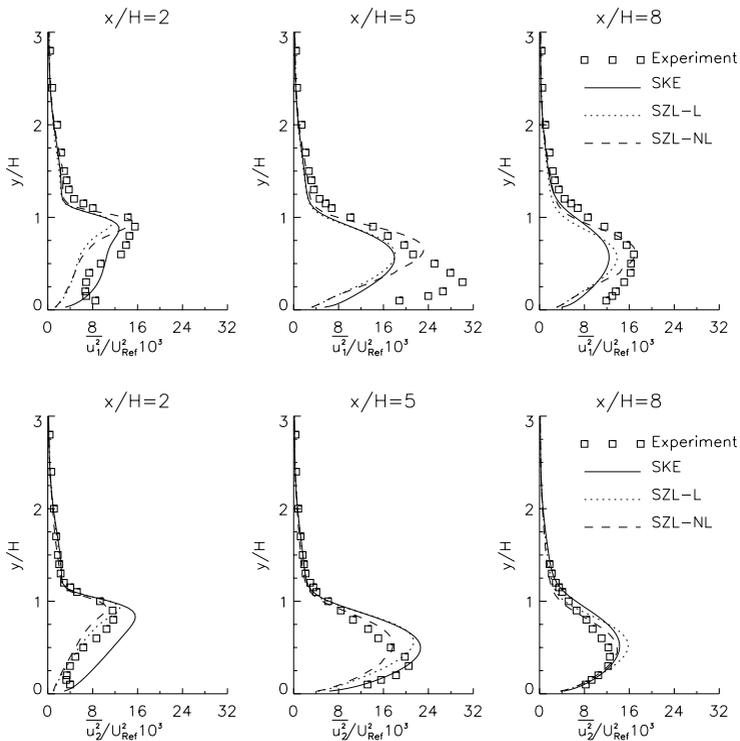


Abbildung 4.66: Profile der turbulenten Normalspannungen hinter der Stufe. ($\alpha = 0^\circ$, lineare und nicht-lineare Modellversion)

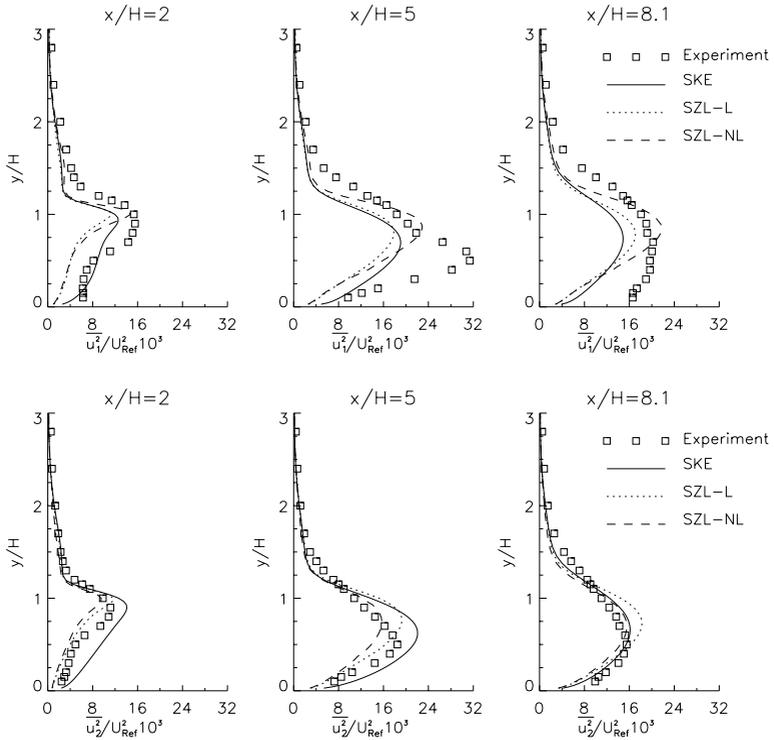


Abbildung 4.67: Profile der turbulenten Normalspannungen hinter der Stufe.
 ($\alpha = 6^\circ$, lineare und nicht-lineare Modellversion)

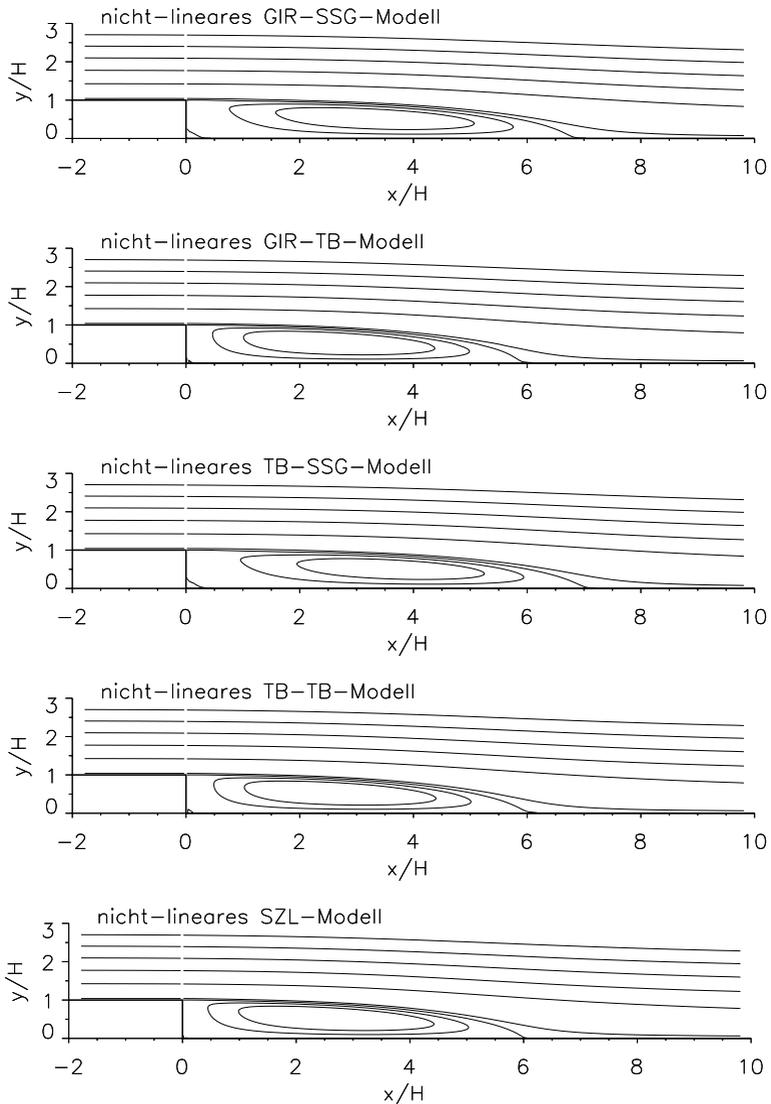


Abbildung 4.68: Stromlinien hinter der zurückspringenden Stufe.
 ($\alpha = 0^\circ$, nichtlineare Modellvarianten)

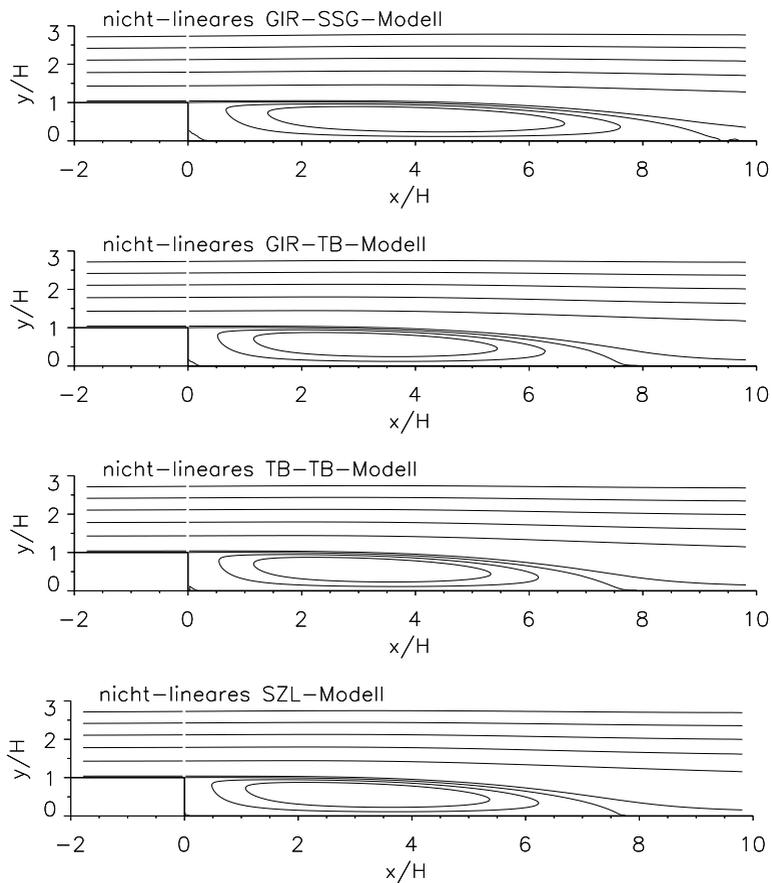


Abbildung 4.69: Stromlinien hinter der zurückspringenden Stufe.
 ($\alpha = 6^\circ$, nichtlineare Modellvarianten)

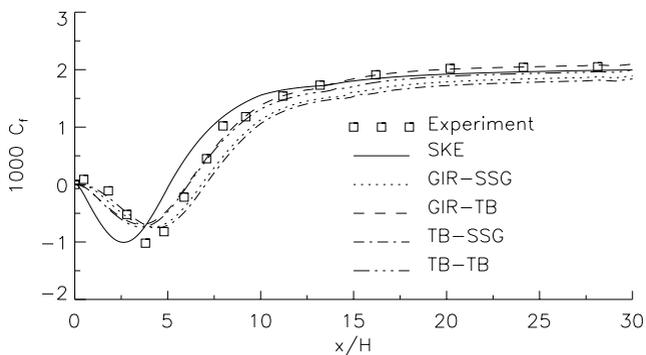


Abbildung 4.70: C_f -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
 ($\alpha = 0^\circ$, nichtlineare Modellvarianten)

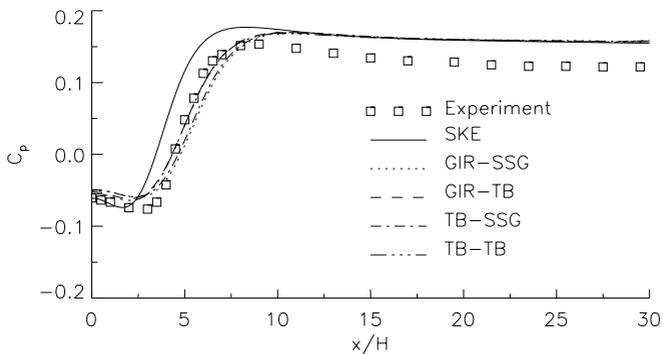


Abbildung 4.71: C_p -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
 ($\alpha = 0^\circ$, nichtlineare Modellvarianten)

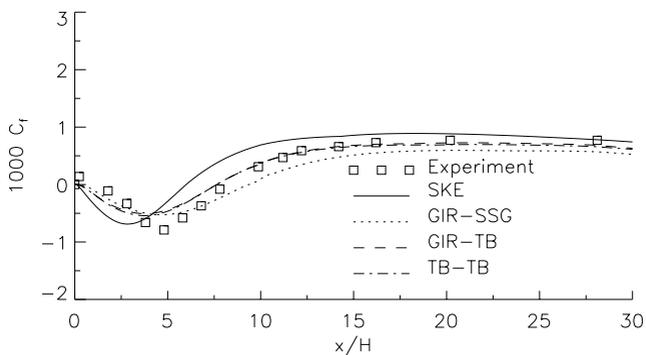


Abbildung 4.72: C_f -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
 ($\alpha = 6^\circ$, lineare und nichtlineare Modellvarianten)

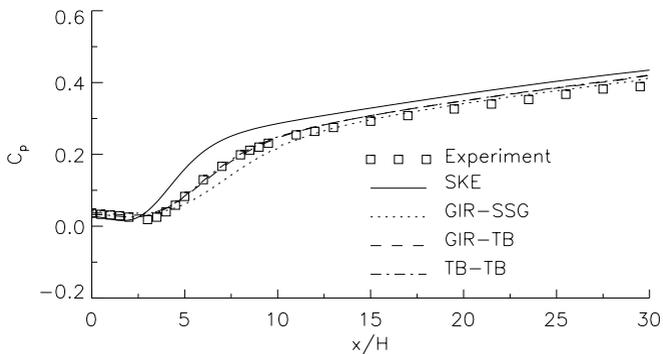


Abbildung 4.73: C_p -Verteilung an der stufenseitigen Wand.
 ($\alpha = 6^\circ$, lineare und nichtlineare Modellvarianten)

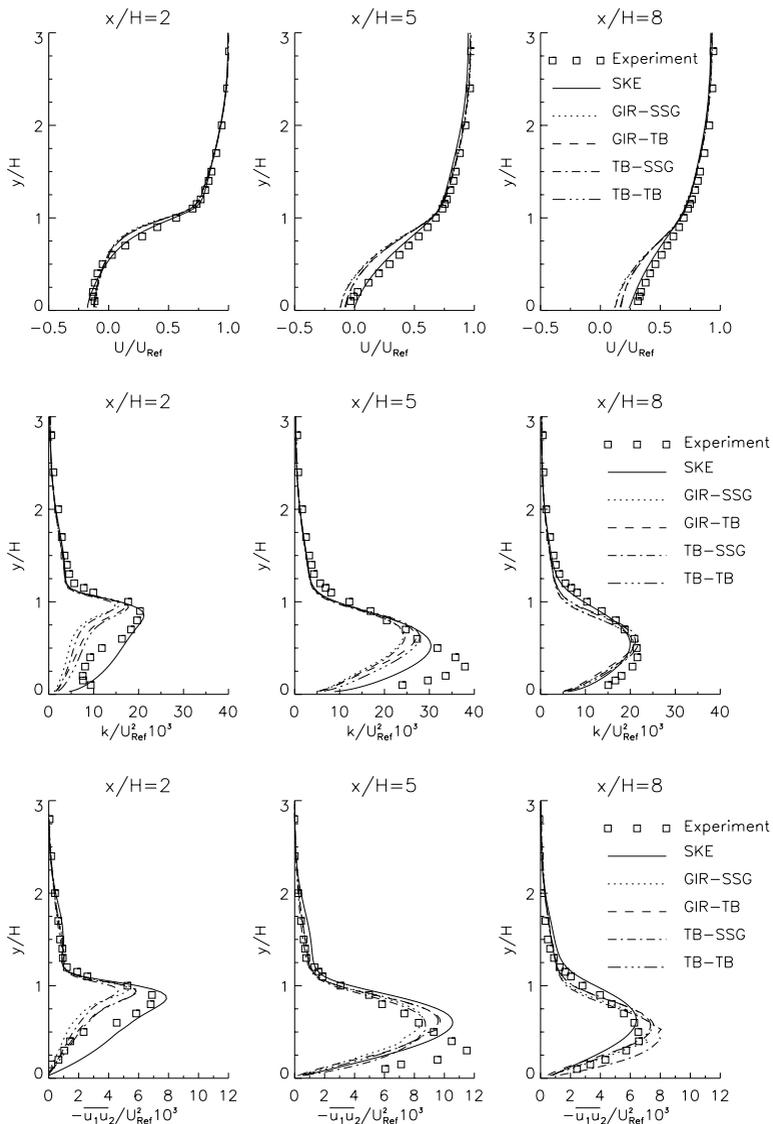


Abbildung 4.74: Profile der Geschwindigkeit, Turbulenzenergie und turbulenten Schubspannung hinter der Stufe. ($\alpha = 0^\circ$, nichtlineare Modellvarianten)

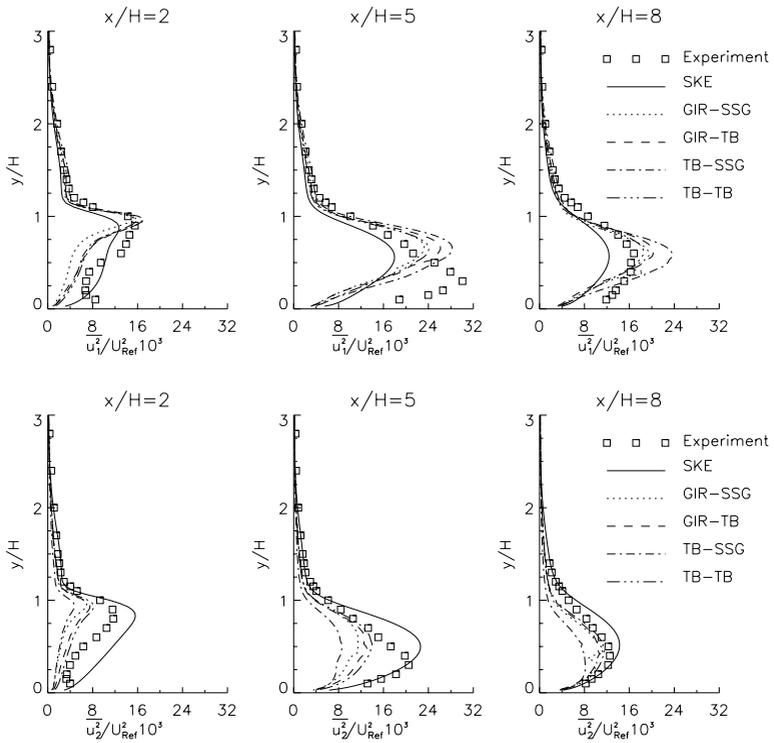


Abbildung 4.75: Profile der turbulenten Normalspannungen hinter der Stufe. ($\alpha = 0^\circ$, nichtlineare Modellvarianten)

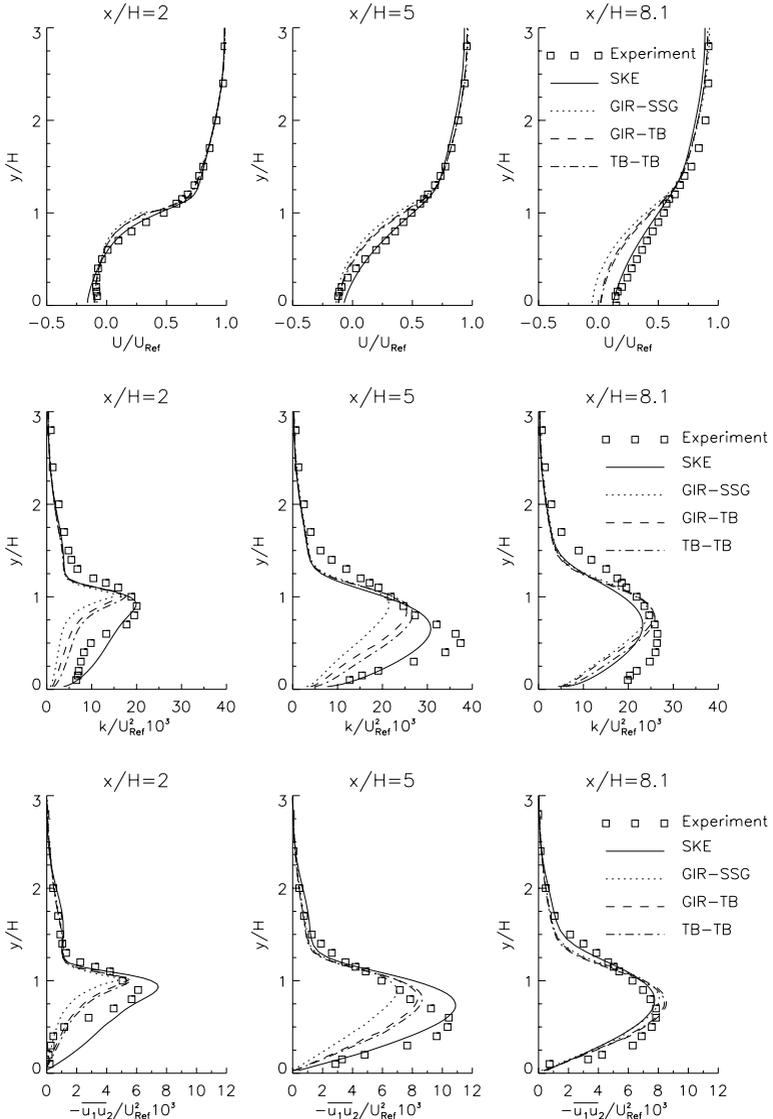


Abbildung 4.76: Profile der Geschwindigkeit, Turbulenzenergie und turbulenten Schubspannung hinter der Stufe. ($\alpha = 6^\circ$, nichtlineare Modellvarianten)

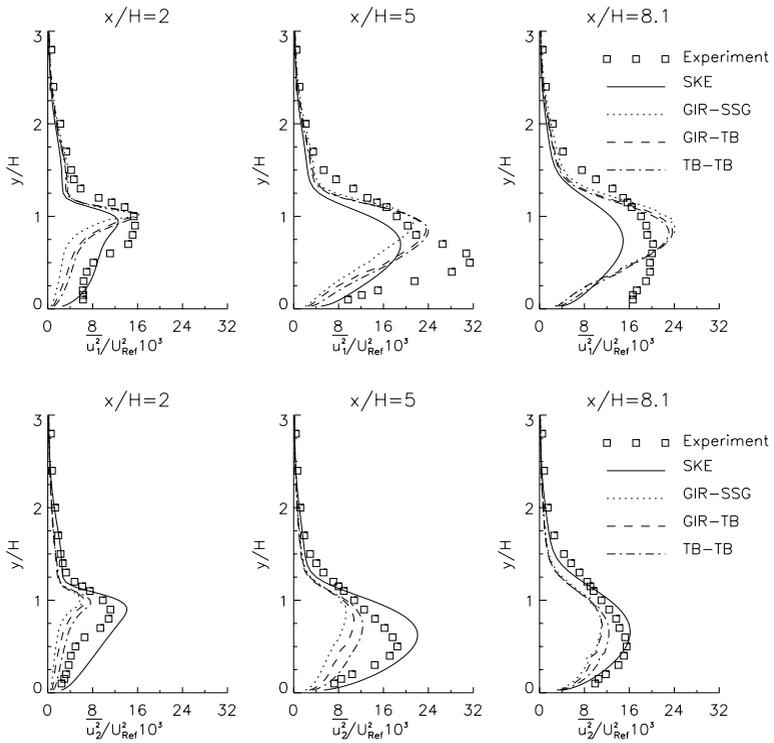


Abbildung 4.77: Profile der turbulenten Normalspannungen hinter der Stufe.
 ($\alpha = 6^\circ$, nichtlineare Modellvarianten)

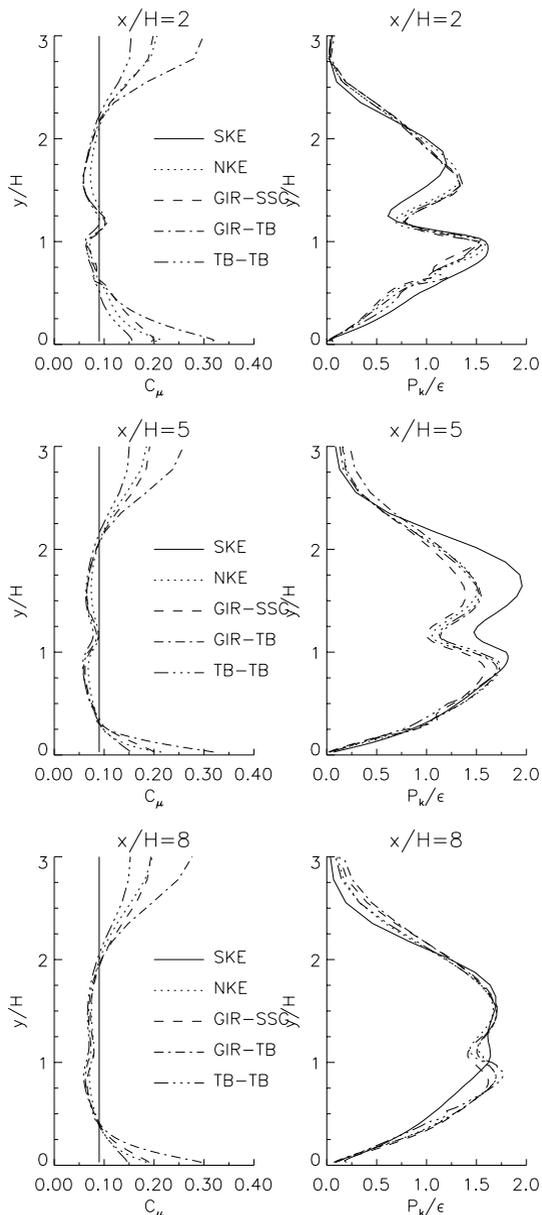


Abbildung 4.78: C_μ - und P_k/ϵ -Verteilung hinter der zurückspringenden Stufe. ($\alpha = 0^\circ$, lineare Modellvarianten)

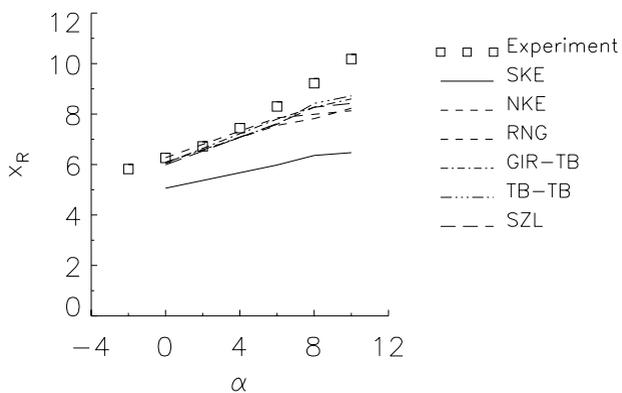


Abbildung 4.79: Wiederanlegelänge für verschiedene Winkel α .

D.2 Ergebnisse der Umströmung des 2-dimensionalen Hügels

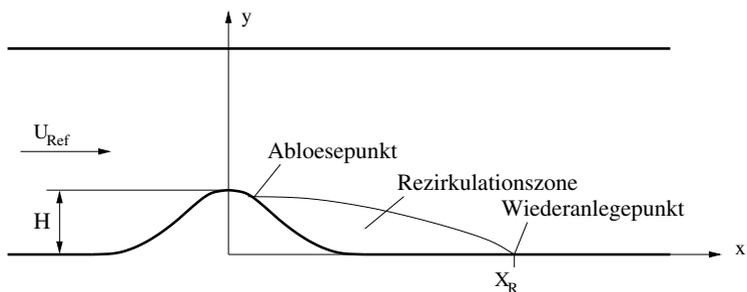


Abbildung 4.80: Geometrie der Hügelfläussung.

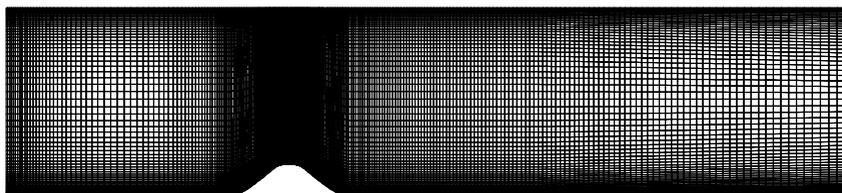


Abbildung 4.81: Darstellung des für die Berechnungen verwendeten Netzes.

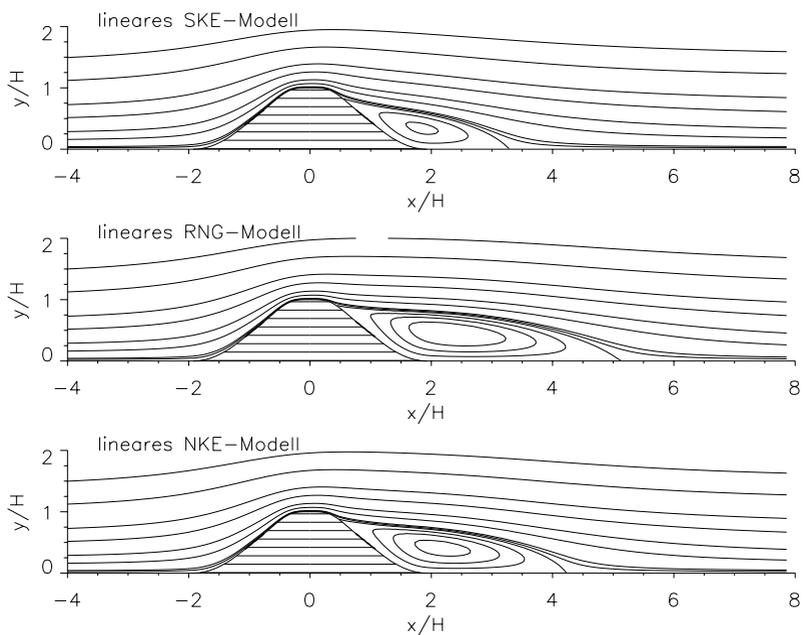


Abbildung 4.82: Höhenlinien der Stromfunktion.

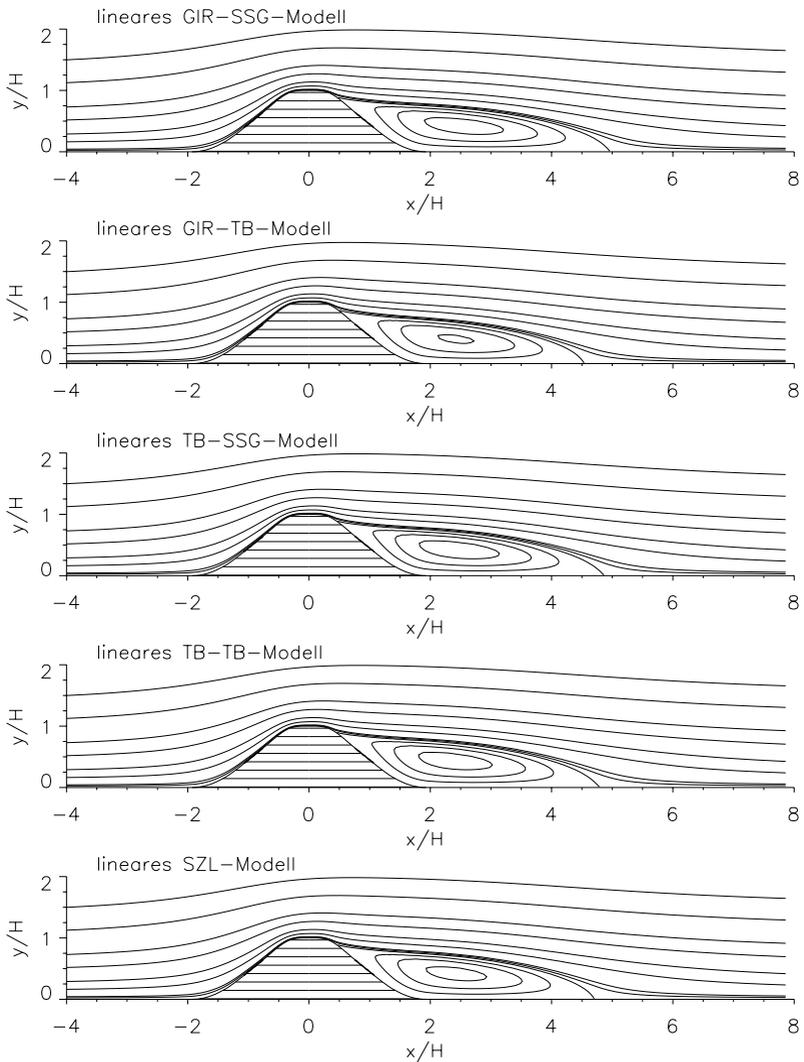


Abbildung 4.83: Höhenlinien der Stromfunktion.(Lineare Modellvarianten)

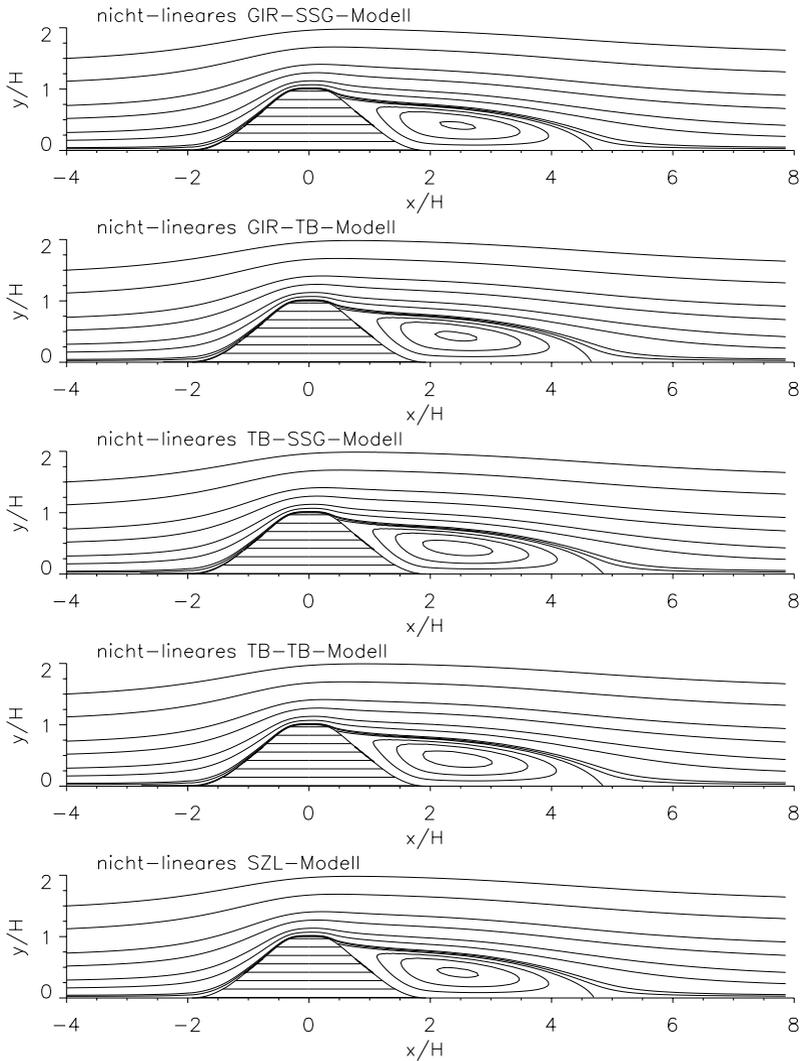


Abbildung 4.84: Höhenlinien der Stromfunktion.
(Nichtlineare Modellvarianten)

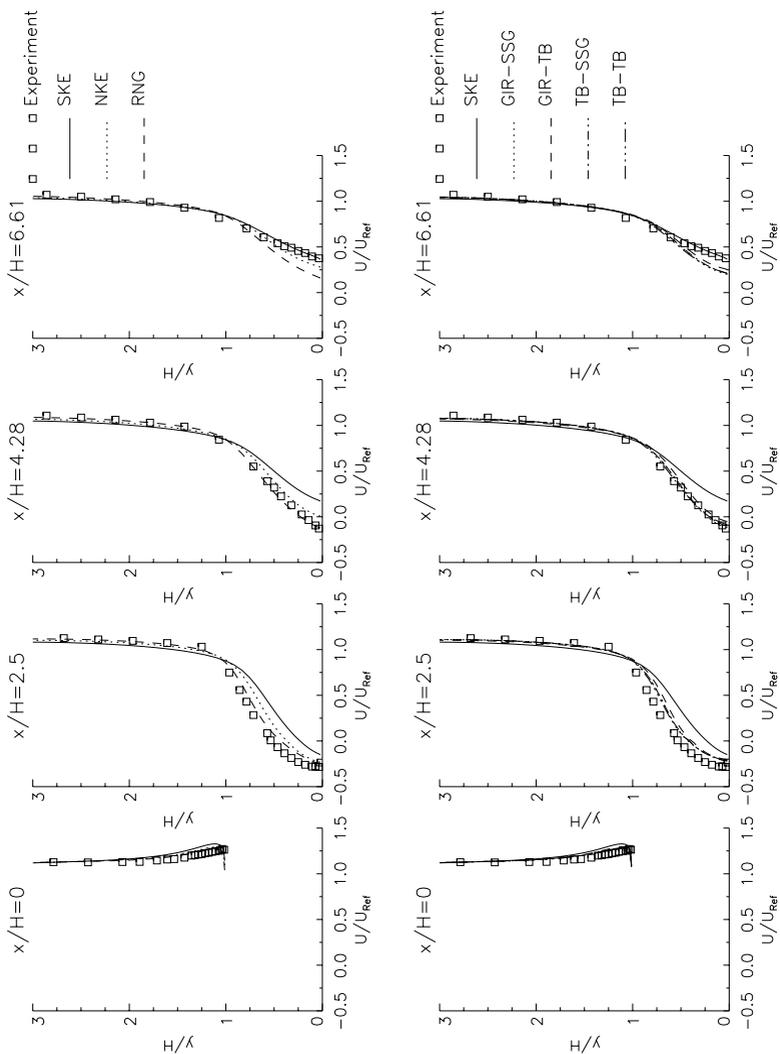


Abbildung 4.85: Geschwindigkeitsverteilung an verschiedenen axialen Positionen hinter dem Hügel.(lineare Modellvarianten)

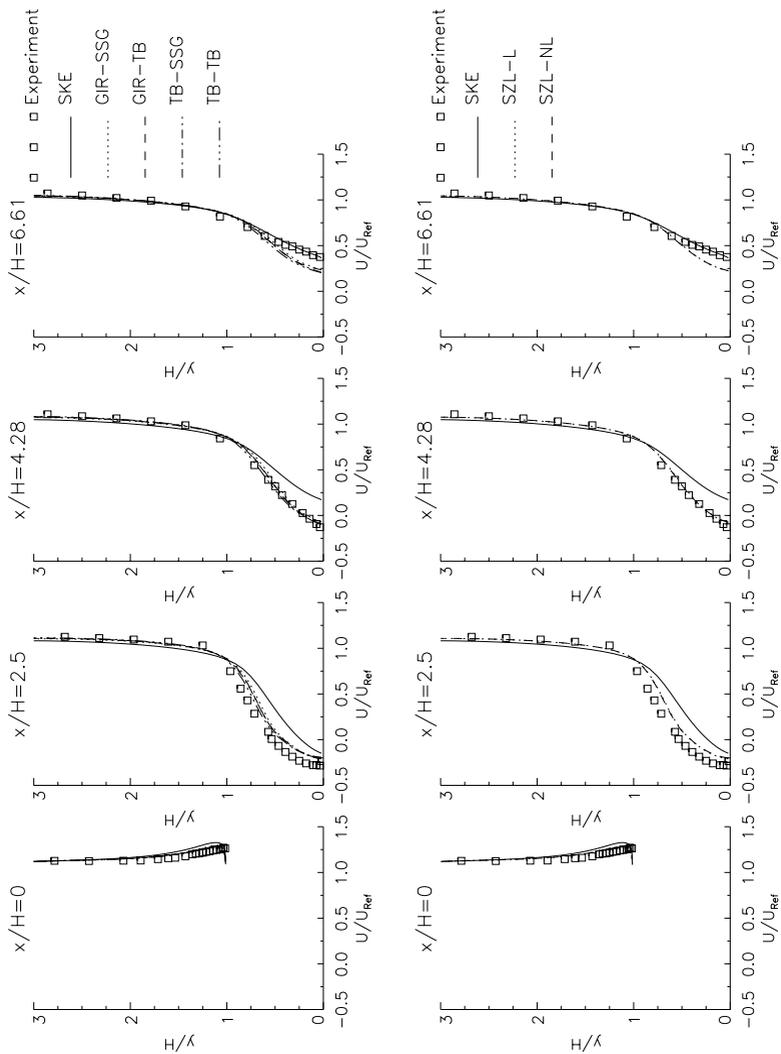


Abbildung 4.86: Geschwindigkeitsverteilung an verschiedenen axialen Positionen hinter dem Hügel.
 (oberes Bild: nichtlineare Modellvarianten)

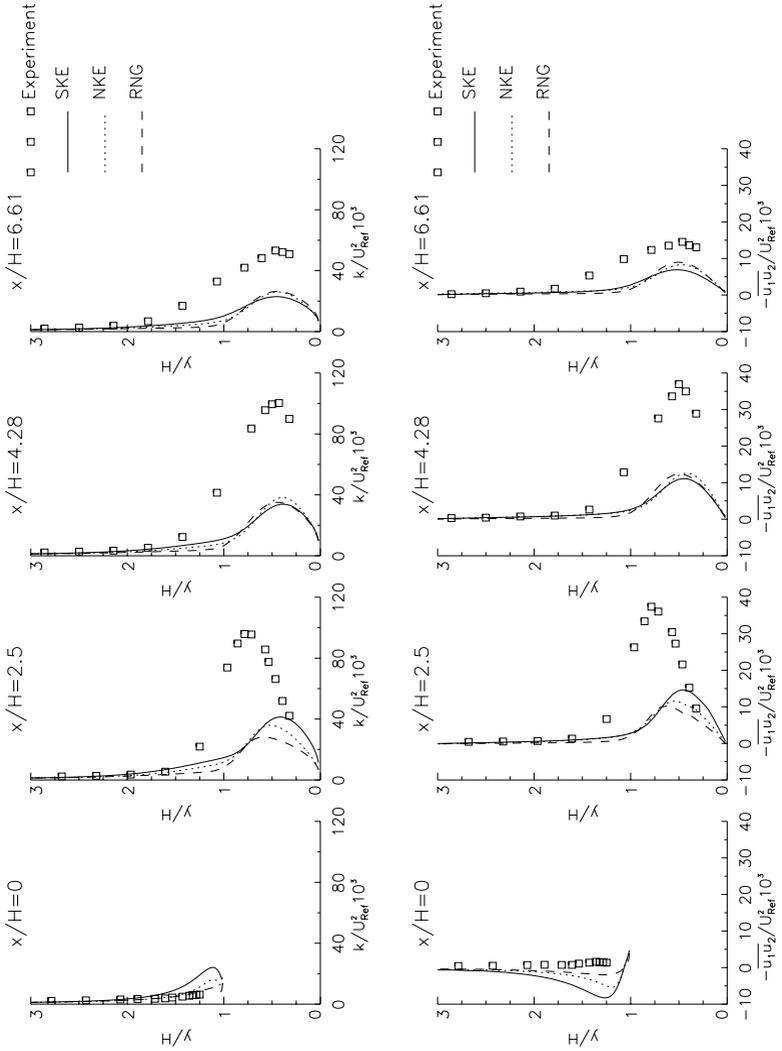


Abbildung 4.87: Verteilung der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannung an verschiedenen axialen Positionen hinter dem Hügel.

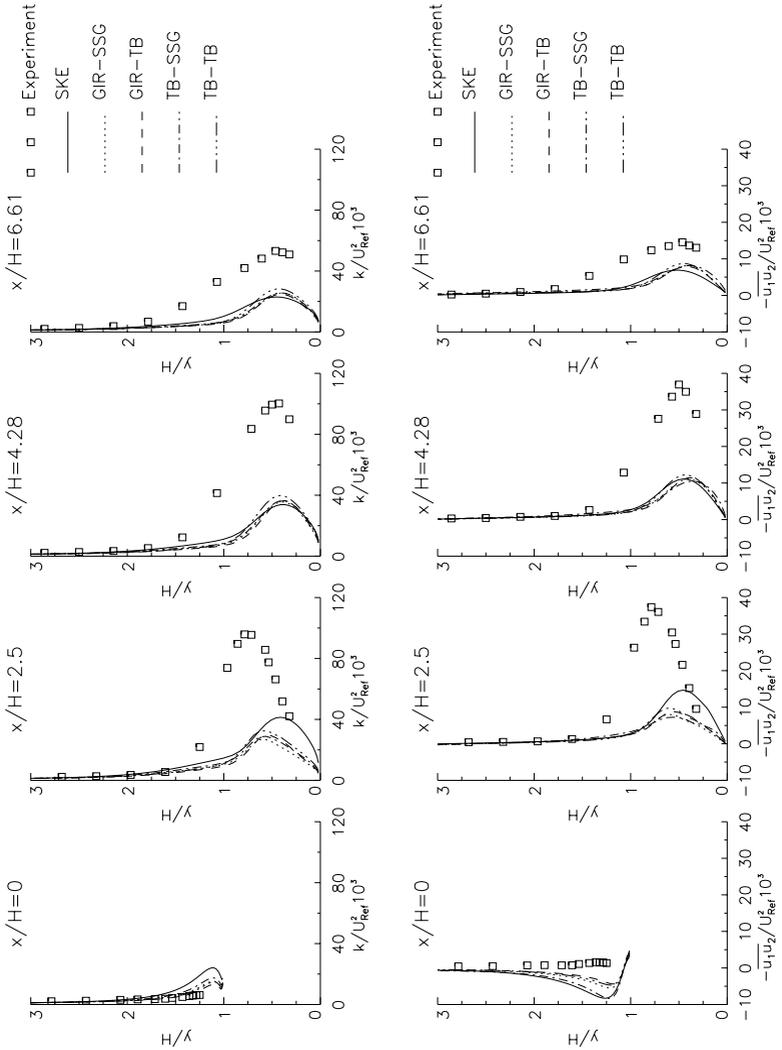


Abbildung 4.88: Verteilung der Turbulenzenergie und turbulenten Schubspannung an verschiedenen axialen Positionen hinter dem Hügel. (lineare Modellvarianten)

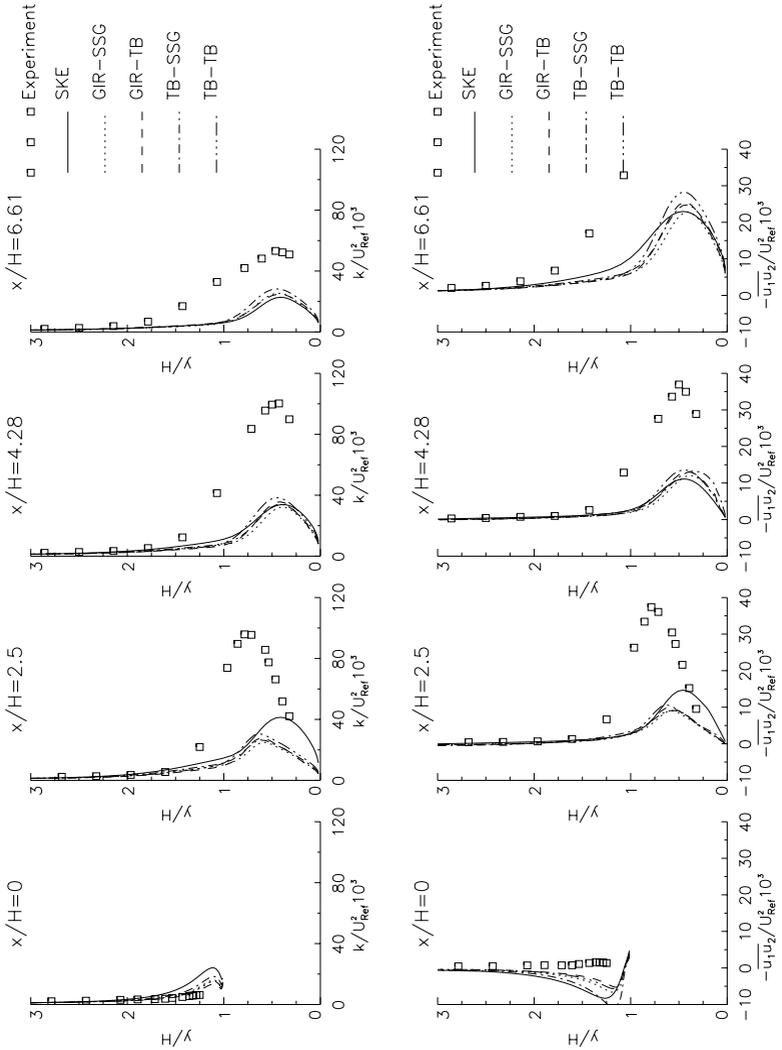


Abbildung 4.89: Verteilung der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannung an verschiedenen axialen Positionen hinter dem Hügel. (nichtlineare Modellvarianten)

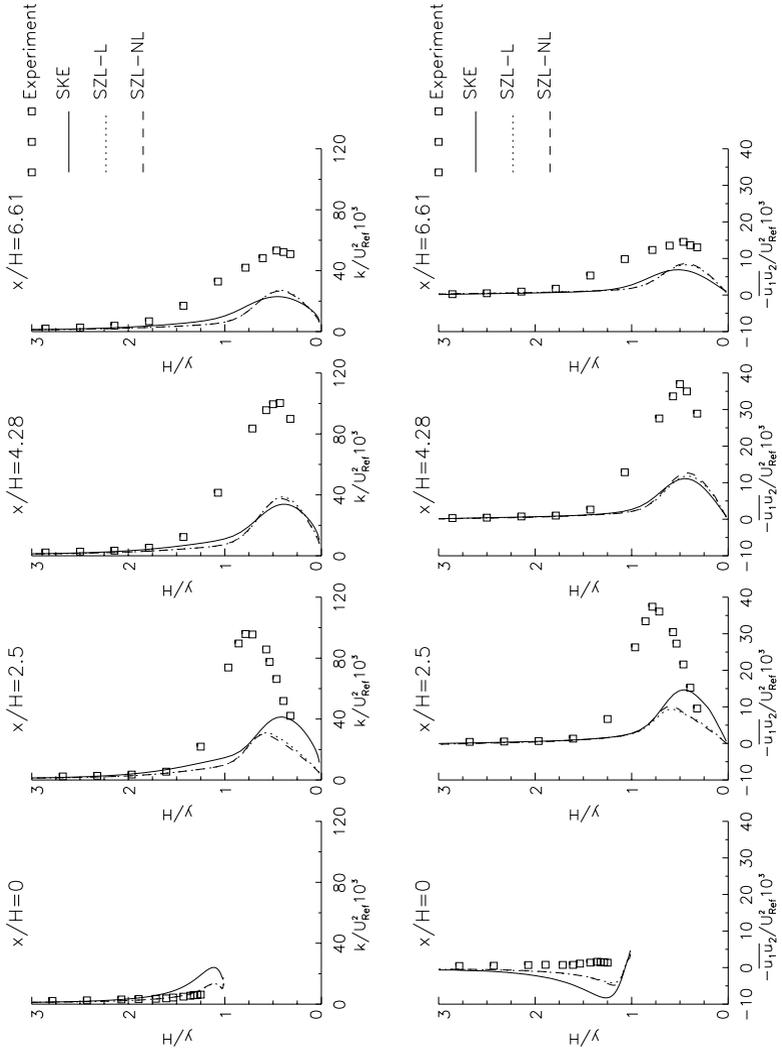


Abbildung 4.90: Verteilung der Turbulenzenergie und der turbulenten Schubspannung an verschiedenen axialen Positionen hinter dem Hügel.

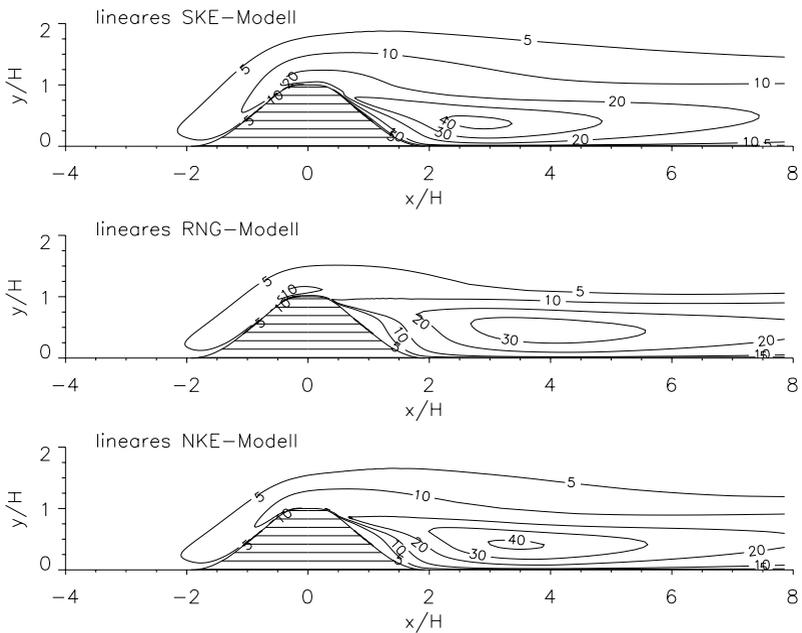


Abbildung 4.91: Berechnete Höhenlinien der Turbulenzenergie k/U_{Ref}^3 .

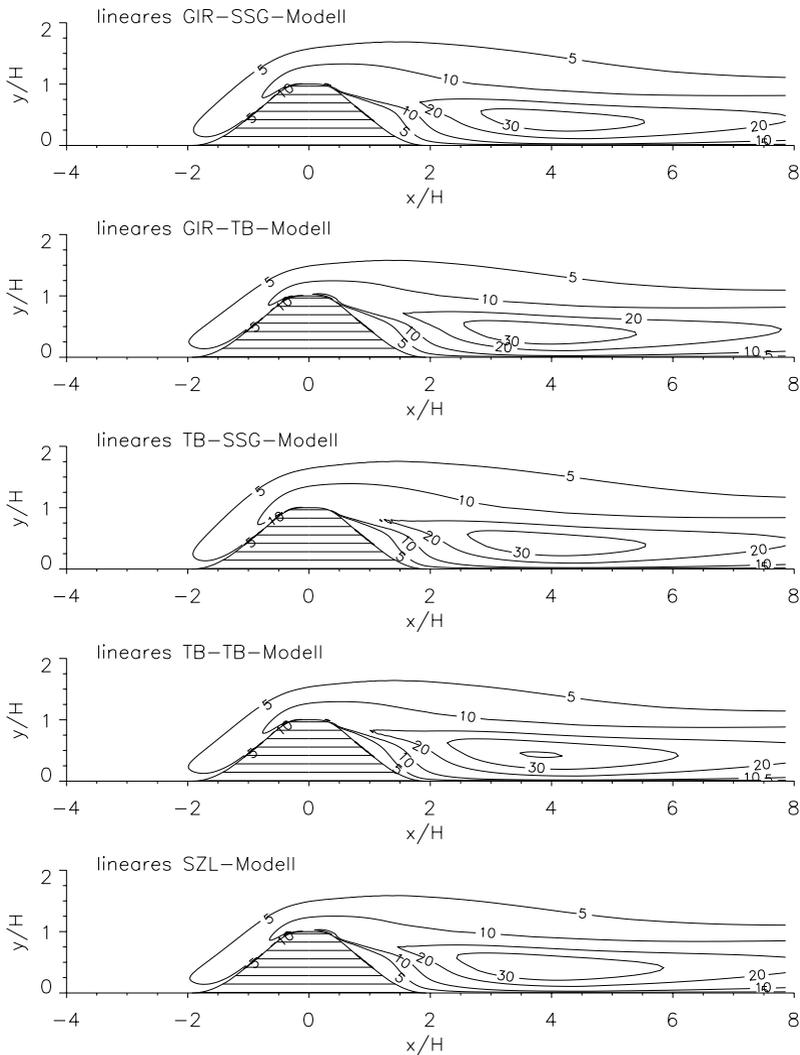


Abbildung 4.92: Berechnete Höhenlinien der Turbulenzenergie $k/U_{Ref}10^3$.
(Lineare Modellvarianten)

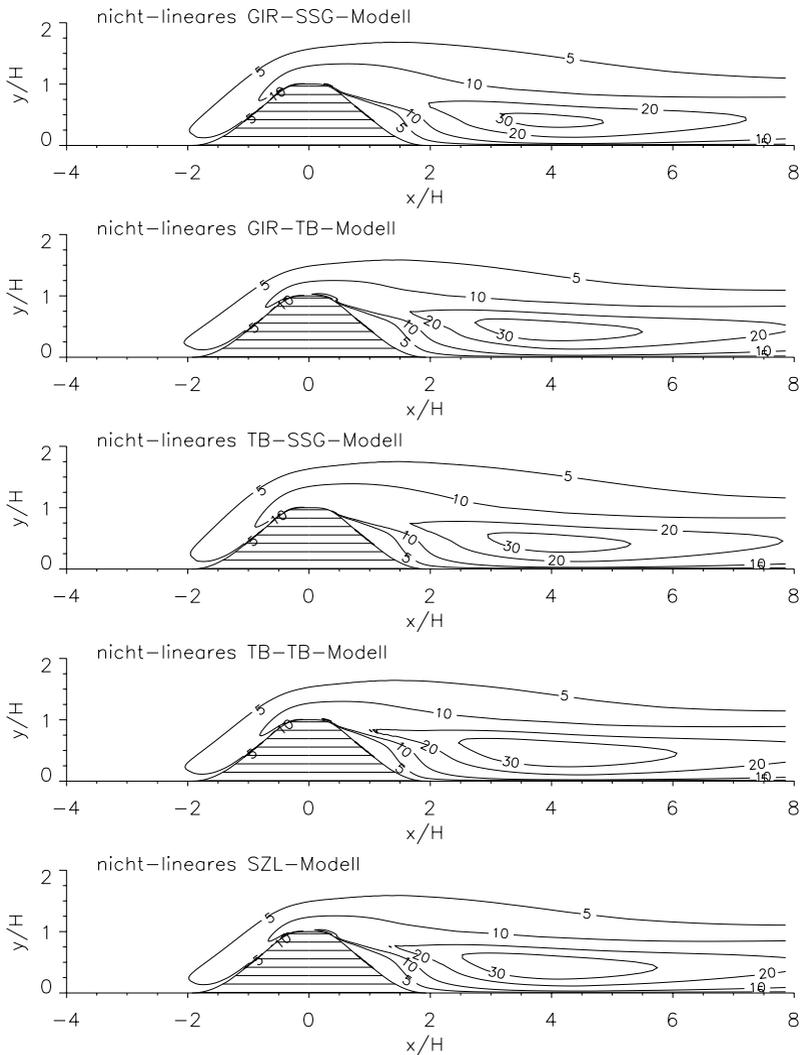


Abbildung 4.93: Berechnete Höhenlinien der Turbulenzenergie $k/U_{\text{Ref}} \cdot 10^3$.
(Nichtlineare Modellvarianten)

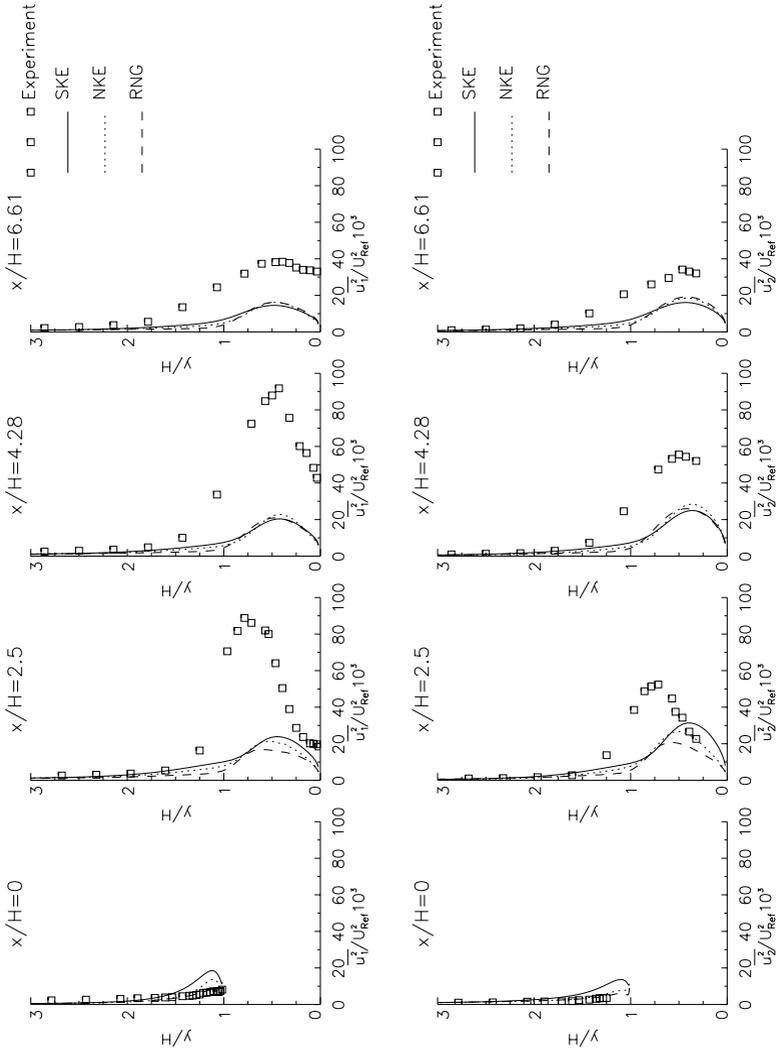


Abbildung 4.94: Turbulente Normalspannungen an verschiedenen axialen Positionen hinter dem Hugel.

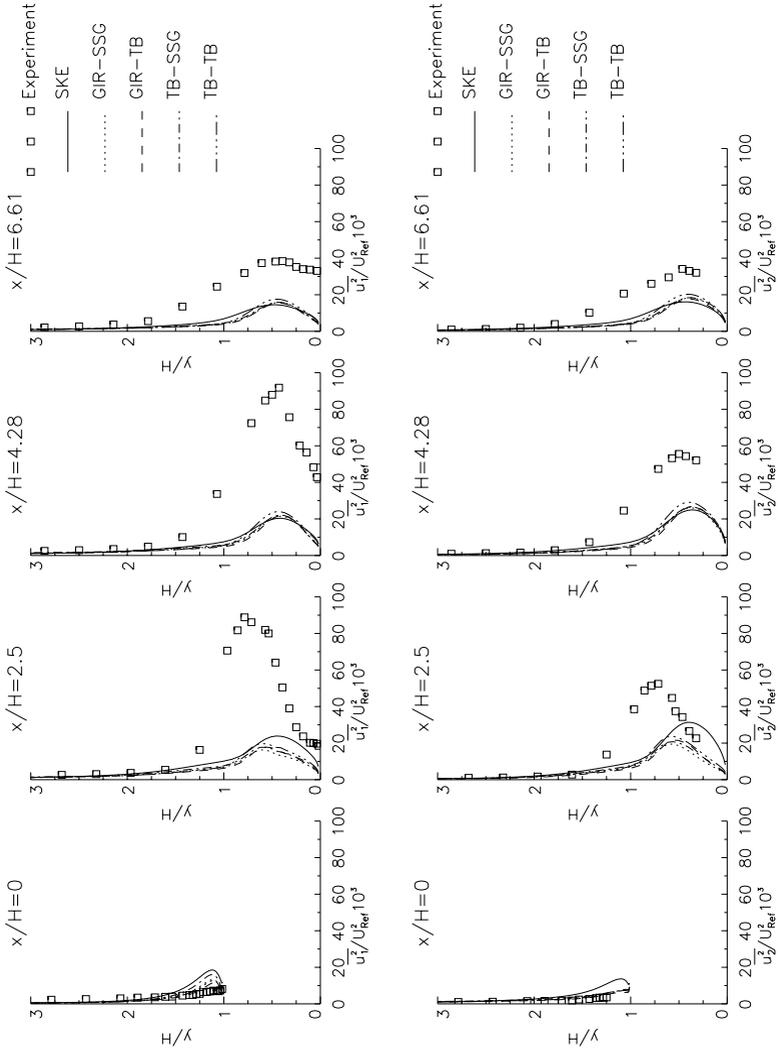


Abbildung 4.95: Turbulente Normalspannungen an verschiedenen axialen Positionen hinter dem Hugel(lineare Modellvarianten).

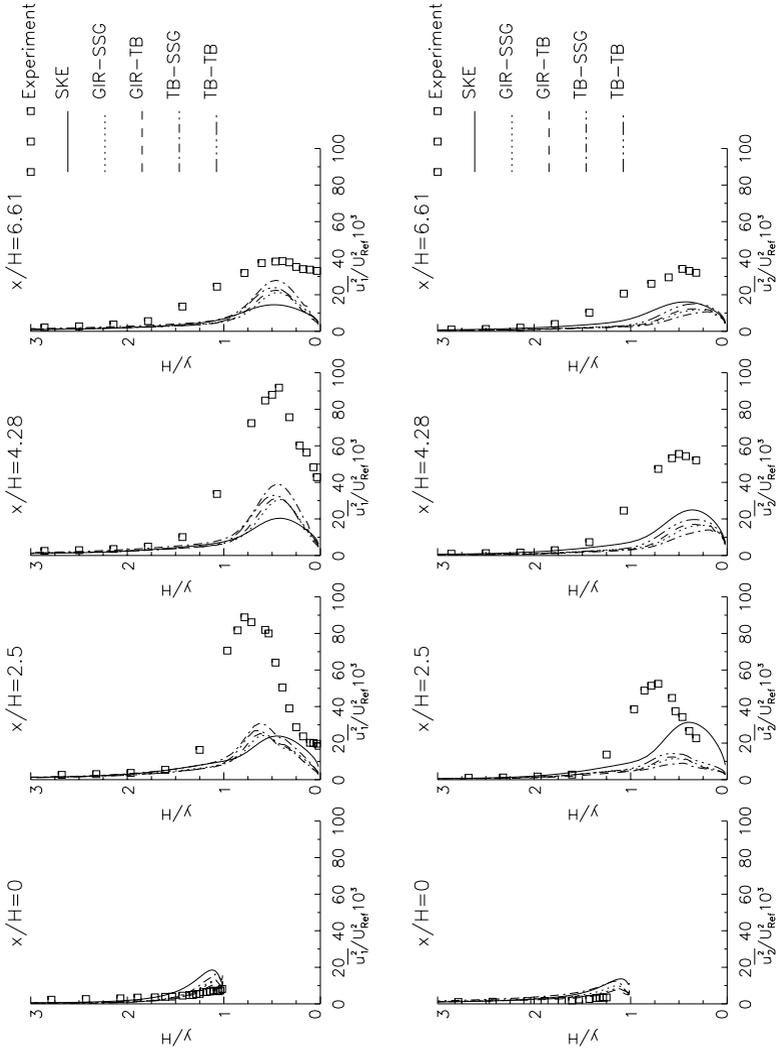


Abbildung 4.96: Turbulente Normalspannungen an verschiedenen axialen Positionen hinter dem Hugel (nichtlineare Modelle).

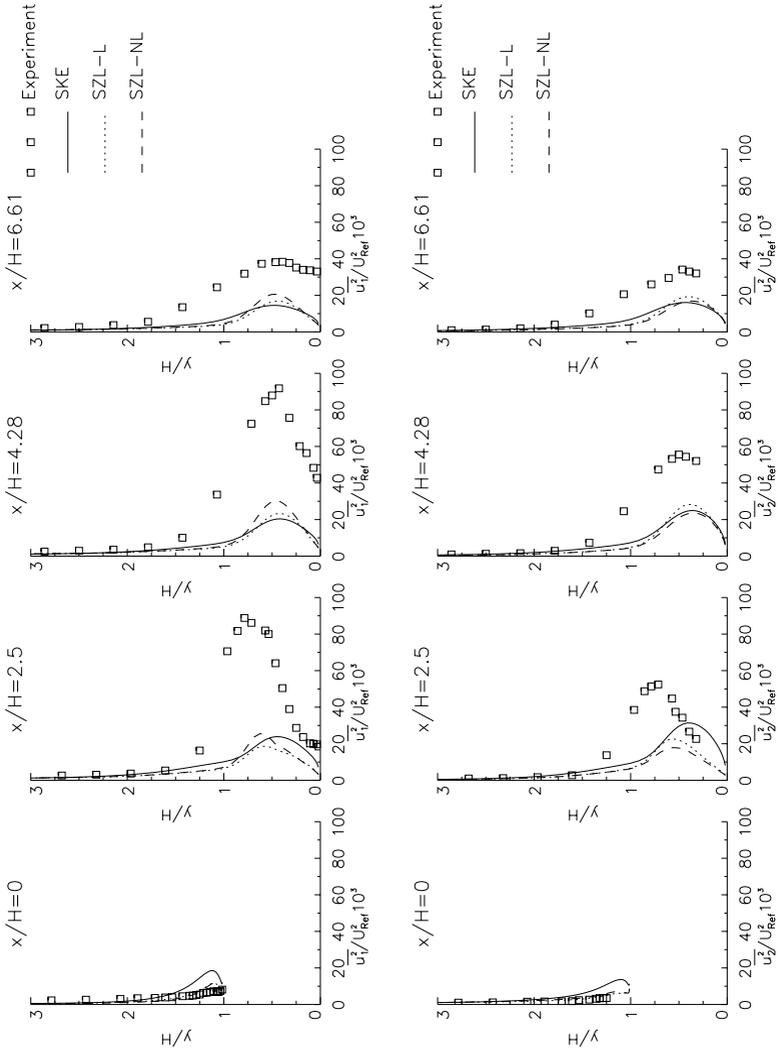


Abbildung 4.97: Turbulente Normalspannungen an verschiedenen axialen Positionen hinter dem Hügel.

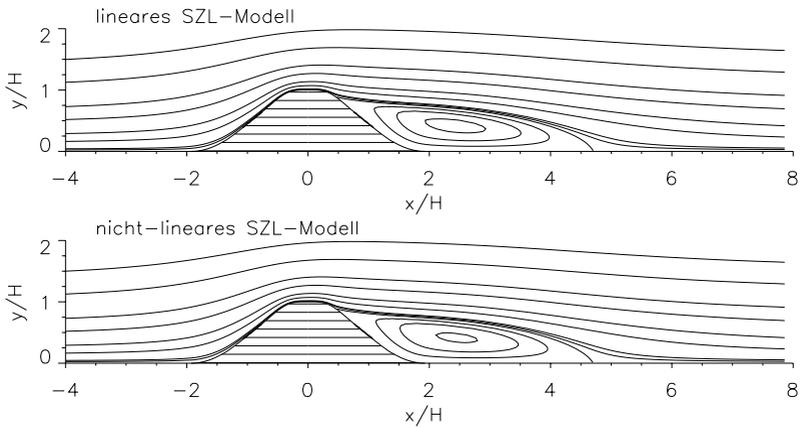


Abbildung 4.98: Stromlinien - Vergleich der linearen und nichtlinearen Modellversion.

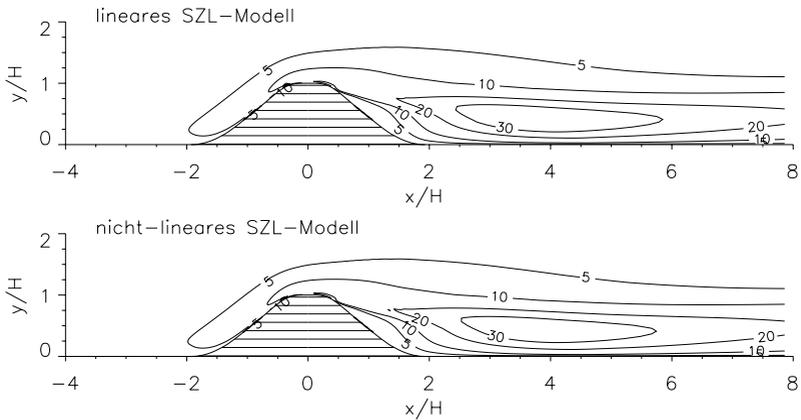


Abbildung 4.99: Höhenlinien der Turbulenzenergie k/U_{Ref}^3 - Vergleich der linearen und nichtlinearen Modellversion.

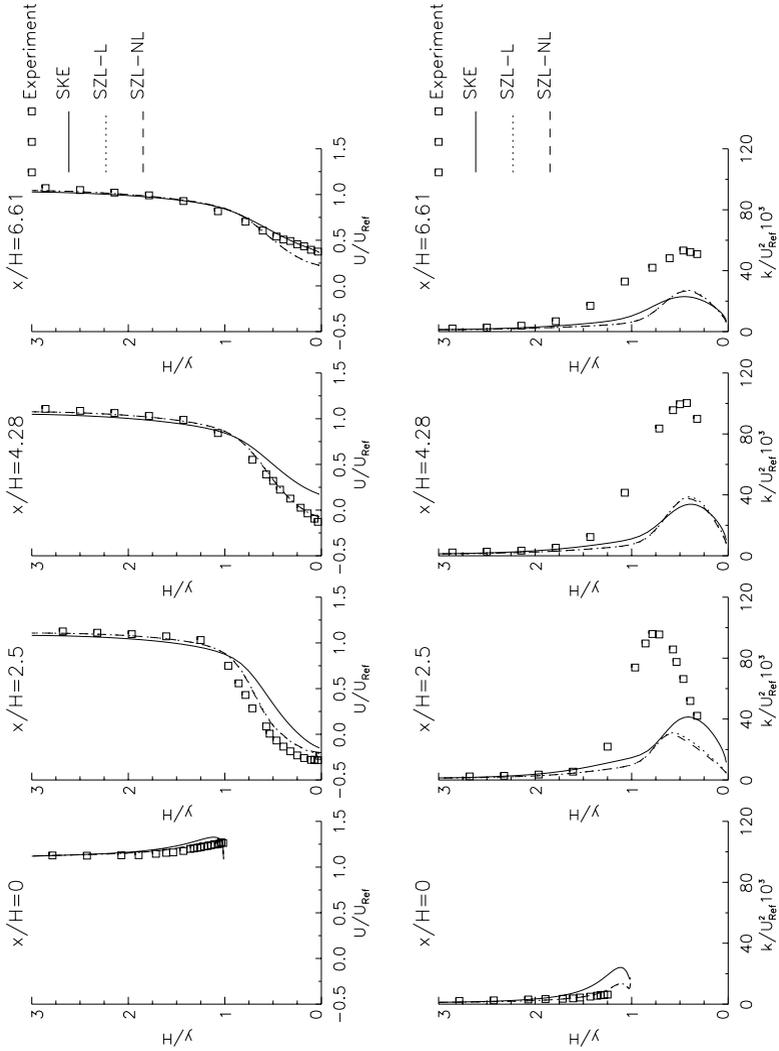


Abbildung 4.100: Geschwindigkeits- und Turbulenzenergieverteilung an verschiedenen axialen Positionen hinter dem Hugel - Vergleich der linearen und nichtlinearen Modellversion.

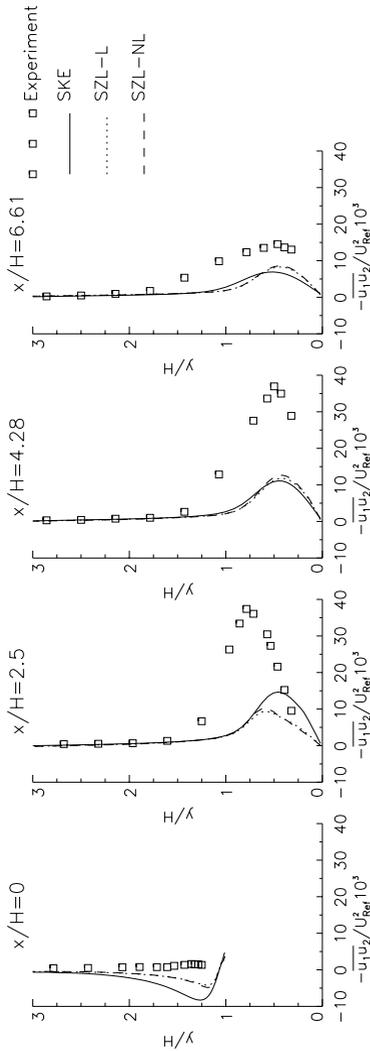


Abbildung 4.101: Turbulente Schubspannung an verschiedenen axialen Positionen hinter dem Hügel - Vergleich der linearen und nichtlinearen Modellversion.

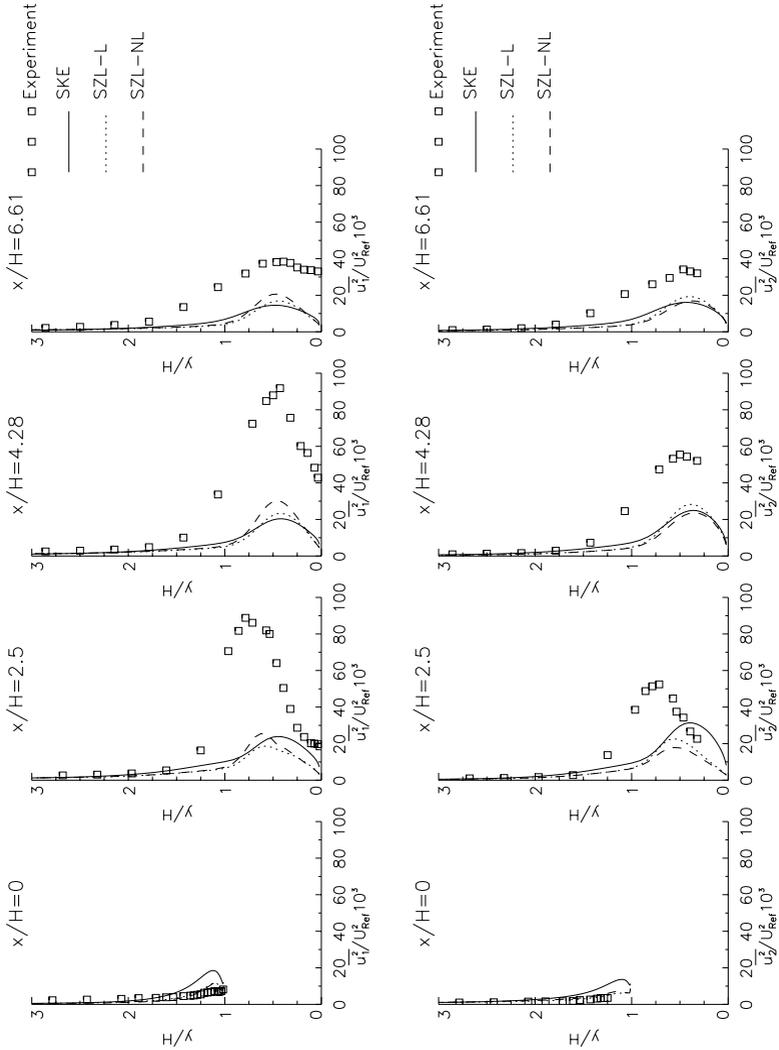


Abbildung 4.102: Turbulente Normalspannungen an verschiedenen axialen Positionen hinter dem Hugel - Vergleich der linearen und nichtlinearen Modellversion.

Literatur

- [ADH93] G.P. Almeida, D.F.G. Durao und M.V. Heitor. Wake flows behind two-dimensional model hills. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 7, Seite 87, 1993.
- [ARG95] R. Abid, C. Rumsey und T.B. Gatski. Prediction of nonequilibrium turbulent flows with explicit algebraic stress models. *AIAA Journal*, 33, Seite 2026, 1995.
- [BFR83] J. Bardina, J.H. Ferziger und W. Reynolds. Improved turbulence models based on large-eddy simulation of homogeneous, incompressible turbulent flows. Technical Report TF-19, Stanford University, 1983.
- [BG83] D.R. Boyle und M.W. Goyal. Measurements of a recirculating, two-dimensional, turbulent flow and comparison to turbulence model predictions. - I: Steady state case. *Journal of Fluids Engineering*, 105, Seite 439, 1983.
- [Bra73] P. Bradshaw. Effects of streamline curvature on turbulent flow. Technical Report 169, AGARD, 1973.
- [C+93] D. Cooper et al. Impinging jet studies for turbulence model assessment. Part 1: Flow field experiments. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 1993.
- [CHC70] F.H. Champagne, V.G. Harris und S. Corrsin. Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 41, Seite 81, 1970.
- [CLS93] T.J. Craft, B.E. Launder und K. Suga. Extending the applicability of eddy viscosity models through the use of deformation invariants and non-linear elements. In *5th IAHR Conference on Refined-Flow Modelling and Turbulence Measurements*, 1993.
- [CLS95] T.J. Craft, B.E. Launder und K. Suga. Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence. *Int. Journal of Heat and Fluid Flow*, 17, Seite 108, 1995.
- [Cor92] Jürgen Cordes. *Entwicklung eines Zweischichten-Turbulenzmodells und seine Anwendung auf abgelöste, zweidimensionale Strömungen*. Dissertation, TH Karlsruhe, 1992.
- [DR84] A.O. Demuren und W. Rodi. Calculation of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts. *Journal of Fluid Mechanics*, 140, Seite 189, 1984.
- [DS85] D.M. Driver und H.L. Seegmiller. Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow. *AIAA Journal*, 23 (2), Seite 163, 1985.
- [ERC95] ERCOFTAC. *Workshop on Data Bases and Testing of Calculation Methods for Turbulent Flows*, Karlsruhe, 1995.

- [FLT87] S. Fu, B.E. Launder und D.P. Tselepidakis. Accomodating the effects of high strain rates in modelling the pressute strain correlation. Technical Report TFD/87/5, UMIST, 1987.
- [Gat96] T.B. Gatski. Prediction of airfoil characteristics with higher order turbulence models. Technical Report TM-110246, NASA, 1996.
- [Gir95] S.S. Girimaji. Fully explicite and self-consistent algebraic Reynolds stress model. Technical Report 95-82, Institute for Computer Application in Science and Engineering, 1995.
- [Gir96] S.S. Girimaji. Improved algebraic Reynolds stress model for engineering flows. In *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3*, Seite 121. Elsevier, 1996.
- [GL77] M.M. Gibson und B.E. Launder. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 86, Seite 491, 1977.
- [GPE82] F.B. Gessner, J.K. Po und A.F. Emery. *Measurements in developing turbulent flow in an square duct*, Seite 119. Turbulent Shear Flows 2. Springer, 1982.
- [GS92] T.B. Gatski und C.G. Speziale. On explicite algebraic stress models for complex turbulent flows. Technical Report 92-58, Institute for Computer Application in Science and Engineering, 1992.
- [Hin75] J.O. Hinze. *Turbulence*. McGraw-Hill, 2. Auflage, 1975.
- [HL80] K. Hanjalic und B.E. Launder. Sensitizing the dissipation equation to irrotational strains. *Journal of Fluids Engineering*, 102, Seite 34, 1980.
- [JL72] W.P. Jones und B.E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15, Seite 301, 1972.
- [KKJ80] J. Kim, S.J. Kline und J.P. Johnston. Investigation of a reattaching turbulent shear layer: Flow over a backward-facing step. *Journal of Fluids Engineering*, 102, Seite 302, 1980.
- [KMM87] J. Kim, P. Moin und R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 177, Seite 133, 1987.
- [Lau91] B.E. Launder. *Current capabilities for modelling turbulence in industrial flows*, Seite 247. Applied Scientific Research. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [Lau92] B.E. Launder. *On the modelling of turbulent industrial flows*, Seite 91. Computational Methods in Applied Sciences. Elsevier Science Publishers, 1992.
- [Lau95] B.E. Launder. Persönliche Mitteilung, 1995.
- [LCL96] F.S. Lien, W.L. Chen und M.A. Leschziner. Low-Reynolds-number eddy-viscosity modelling based on non-linear stress-strain/vorticity relations. In *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3*, Seite 91. Elsevier, 1996.

- [Les90] M.A. Leschziner. Modelling engineering flows with Reynolds stress turbulence closures. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 35, Seite 21, 1990.
- [Les93] M.A. Leschziner. Computational modelling of complex turbulent flow - expectations, reality and prospects. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 46/47, Seite 37, 1993.
- [Les95] M.A. Leschziner. Persönliche Mitteilung, 1995.
- [LL94] F.S. Lien und M.A. Leschziner. Assessment of turbulence-transport models including non-linear eddy-viscosity formulation and second-moment closure for flow over a backward-facing step. *Computers Fluids*, 23 (8), Seite 983, 1994.
- [LR81] M.A. Leschziner und W. Rodi. Calculation of annular and twin parallel jets using various discretization schemes and turbulence-model variations. *Journal of Fluids Engineering*, 103, Seite 352, 1981.
- [LRR74] B.E. Launder, G.J. Reece und W. Rodi. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics*, 68, Seite 537, 1974.
- [Lun77] E.G. Lund. Mean flow and turbulence Characteristics in the near corner region of a square duct. Diplomarbeit, Department of Mechanical Engineering, University of Washington, 1977.
- [Men92] F.R. Menter. Improved Two-Equation k - ω - Turbulence Models for Aerodynamic Flows. Technical Report TM-103975, NSA, 1992.
- [Men94] F.R. Menter. Assessment of Two-Equation Turbulence Models for Transonic Flows. *AIAA Paper 94-2343*, 1994.
- [Pop75] S.B. Pope. A more general effective-viscosity hypothesis. *Journal of Fluid Mechanics*, 72, Seite 331, 1975.
- [RB90] R. Rubinstein und J.M. Barton. Nonlinear Reynolds stress models and the renormalization group. *Physics of Fluids A*, 2 (8), Seite 1472, 1990.
- [Rod] W. Rodi. Vorlesungsmanuskript. TH Karlsruhe.
- [Rod70] W. Rodi. Basic equations for turbulent flow in cartesian and cylindrical coordinates. Technical Report BL/TN/A/36, UMIST, 1970.
- [Rod76] W. Rodi. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. *ZAMM*, 56, Seite 219, 1976.
- [Rot51] J.C. Rotta. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. *Z. Physik*, 129, Seite 547, 1951.
- [RS86] W. Rodi und G. Scheurer. Scrutinizing the k - ϵ turbulence model under adverse pressure gradient condition. *Journal of Fluids Engineering*, 108, Seite 174, 1986.

- [S⁺94] T.-H. Shih et al. A New k - ϵ eddy viscosity model for high Reynolds number turbulent flows - model development and validation. Technical Report TM-106721, NASA, 1994.
- [Sch77] U. Schumann. Realizability of Reynolds-stress turbulence models. *The Physics of Fluids*, 20 (5), Seite 721, 1977.
- [Sch86] R.S. Schnipke. *A streamline upwind finite element method for laminar and turbulent flow*. Dissertation, University of Virginia, 1986.
- [SL92] T.-H. Shih und J.L. Lumley. Remarks on turbulent constitutive relations. *Math. Comp. Modelling*, 18 (2), Seite 9, 1992.
- [SNT95] F.A. de Souza, D. Nguyen und S. Tavoularis. The structure of highly sheared turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 303, Seite 155, 1995.
- [Spe87] C.G. Speziale. On nonlinear k - l and k - ϵ -models of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 178, Seite 459, 1987.
- [SSG91] C.G. Speziale, S. Sarkar und T.B. Gatski. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 227, Seite 245, 1991.
- [SZ94] T.-H. Shih und J. Zhu. Modelling of wall-bounded complex flows and free shear flows. Technical Report TM-106513, NASA, 1994.
- [SZL93] T.-H. Shih, J. Zhu und J.L. Lumley. A realizable Reynolds stress algebraic equation model. Technical Report TM-105993, NASA, 1993.
- [Tau92] D.B. Taulbee. An improved algebraic Reynolds stress model and corresponding nonlinear stress model. *Physics of Fluids A*, 4 (11), Seite 2555, 1992.
- [TC81] S. Tavoularis und S. Corrsin. Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient - Part I. *Journal of Fluid Mechanics*, 104, Seite 311, 1981.
- [TK89] S. Tavoularis und U. Karnik. Further experiments on the evolution of turbulent stresses and scales in uniformly sheared turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 204 (457), 1989.
- [TS92] S. Thangam und C.G. Speziale. Turbulent flow past a backward-facing step: a critical evaluation of two-equation models. *AIAA Journal*, 30 (5), Seite 1314, 1992.
- [Vic97] P.G. Vicente. Comprehensive analysis of turbulent flows around NACA 0012 profile including dynamic stall effects. Diplomarbeit, Universidad de Murcia, 1997.
- [Wil88] D.C. Wilcox. Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models. *AIAA*, 26 (11), Seite 1299, 1988.

- [Wil93] D.C. Wilcox. Comparison of Two-Equation Turbulence Models for Boundary Layers with Pressure Gradient. *AIAA*, 31 (8), Seite 1414, 1993.
- [Y⁺92] V. Yakhot et al. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Physics of Fluids A*, 4 (7), Seite 1510, 1992.
- [ZS93] J. Zhu und T.-H. Shih. Computation of confined coflow jets with three turbulence models. Technical Report TM-106378, NASA, 1993.

Lebenslauf

von Volker Bäumer, geboren am 23. Juli 1964 in Herford

1971 - 1975	Grundschule Falkstraße, Herford
1975 - 1984	Ravensberger Gymnasium der Stadt Herford
1984 - 1985	Wehrdienst
1985 - 1991	Studium des Maschinenbaus an der TU Braunschweig Fachrichtung: Energie- und Verfahrenstechnik
1991 - 1994	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Raumflug- und Reaktortechnik der TU Braunschweig
1995 - 1997	Doktorant beim European Southern Observatory
seit Juli 1997	Mitarbeiter der CAD-FEM GmbH, Grafing